



Bécezi Szaniszló

**ÉVEZREDEK
ETNOMATEMATIKÁJA
AZ EURÁZSIAI
DÍSZÍTŐMŰVÉSZETBEN**

Budapest, 2011



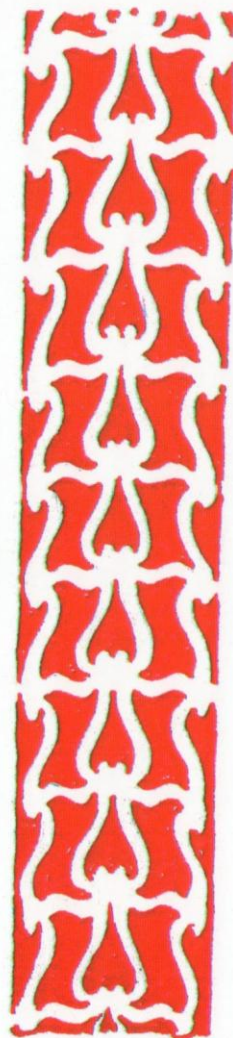
Vjatka v.
Volgai magy.



Szentes
Árpád népe



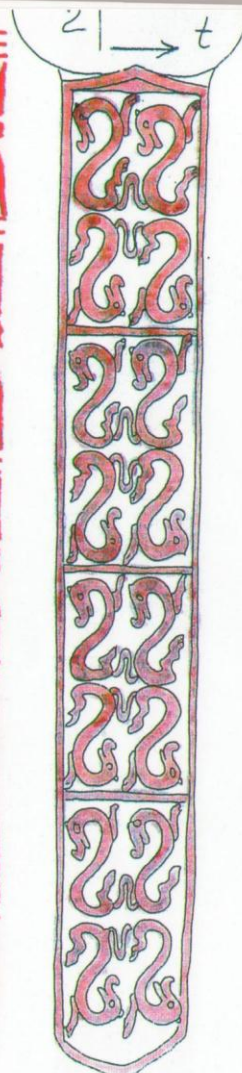
Jászdózsa
Árpád népe



Soltszentimre
Árpád népe



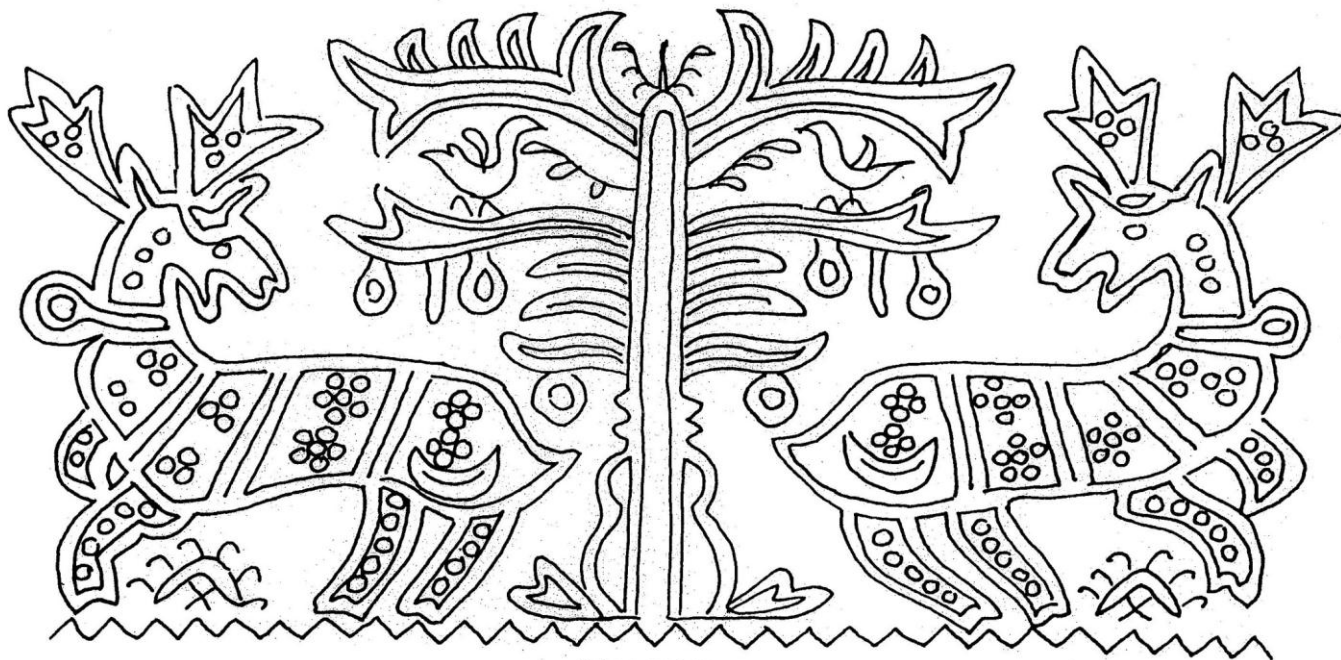
Veszkény
Árpád népe



Tokió, Nemz. Múz.
Xiongnu műv.



Tiszafüred-Majoros
Avar kori műv.



Bérczi Szaniszló

ÉVEZREDEK
ETNOMATEMATIKÁJA
AZ EURÁZSIAI
DÍSZÍTŐMŰVÉSZETBEN

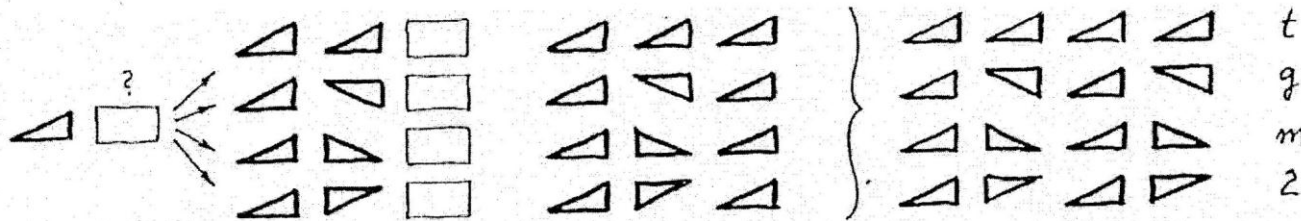
Budapest, 2011

ÉVEZREDEK ETNOMATEMATIKÁJA AZ EURÁZSIAI DÍSZÍTŐMŰVÉSZETBEN
Bérczi Szaniszló, Budapest, 2011

A díszítőművészeti alkotások a teljes élet gazdagságát őrzik. Az élet része a mítikus ősök legendája, a hitvilág, a népszokások egyik oldalán és a technológiák, egzakt tudás a térről, a rendről, anyagokról, a másik oldalán. Az Eurázsia Művészetek Füzet sorozat arra törekedett, hogy sokoldalúan mutassa be az ókori népek életét művészeti alkotásaikon át. Mostani tanulmányunkban kiemeljük a geometriai tudásról elrejtett kincseket. Ebben főleg geometriai segédeszközökkel élünk. A díszítőművészet matematikai vizsgálatát az alkotásokon szereplő mintázat ismétlődő elemeire alapozhatjuk. A díszített felületen az alkotó mester az egybevágó elemeket szabályos alakzatokban rendezte el. A mintaelemek, a szereplő figurák, alakok, növények és állatok, a műveltség gondolatvilágához kapcsolódnak. A minta szabályosságai azonban a geometria törvényei szerint tárgyalhatók.

A mintázatokat is a természettől és az élettől tanulta az ember. Ősidők óta készített mintákat úgy, hogy a testrészeivel lenyomatot hagy a felületeken. Ilyenkor a gyártó kéz vagy láb megismétli a lenyomatot. De maga a mozgás nem csak az iparos mester keze nyomán hoz létre mintát. Az állat haladásának nyomai a vadászok előtt ősidők óta ismert mintázatok, hiszen ennek alapján lehetett azt megtudni, milyen állat haladt el ott a vadász előtt. Amíg tehát a minta a mester számára a szabályos, ismétlődő, gyártó műveleteket jelenti, a vadász számára a remélt zsákmányt.

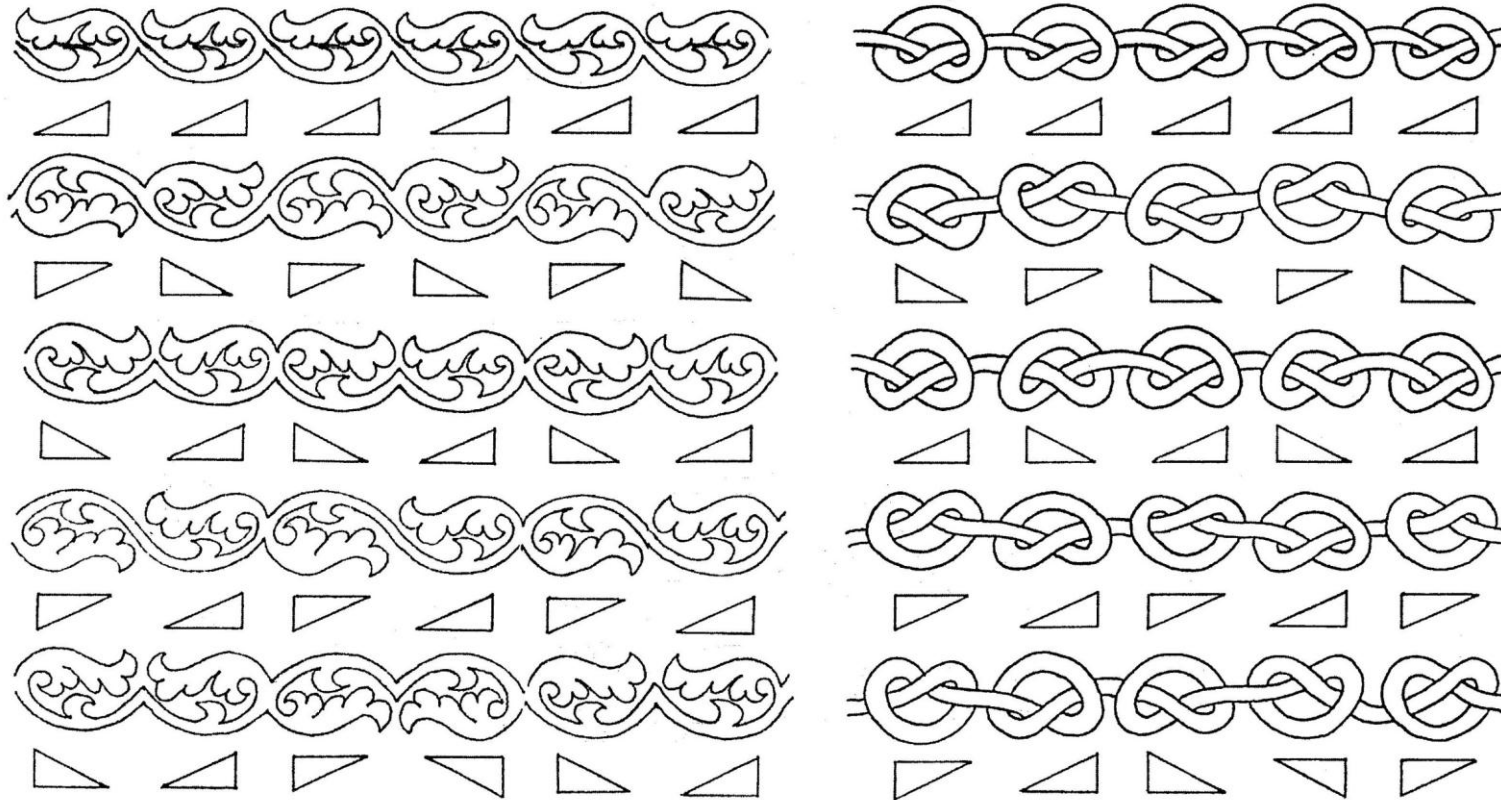
Többféle mintázat lehetőségét tárgyaljuk. Először a szalagon (frízen) létrehozható mintákat mutatjuk be, majd ezeknek a kör mentén, esetleg egyszerű csomók formájában előálló megfelelőit. A szalagmintákat megkettőzzük, majd tovább terjesztve ki őket a síkon előállítható mintákat elemezzük. A mintázatok a szabályosságukból eredően, egyszerűen leírhatók, mert a leírás során felhasználunk egy fogalmat, amelynek segítségével a tulajdonságok tömören megfogalmazhatók. Ez a fogalom a *szimmetria*. A szimmetria szabályokat, műveleti utasításokat jelent, melyek segítségével egybevágó elemekből, ismétléssel struktúrákat építhetünk föl (Weyl, 1980, Grünbaum, Shephard, 1986). Végül összetett síkbeli mintázatokat elemzünk. Mindezt végig kíséri az Euráziában élt népek régészeti anyaga. A sztyeppeön régészeti leleteit Kínától indulva Közép Ázsián át a Kárpát-medencéig és a Brit-szigetekig kutatjuk. A régi népek művészetében található formakincs sajátos, (matematikai leírás segítségével tárgyalható) intuitív matematikai jellegű fejlesztéseit gyűjtjük össze írásunkban. A díszítőművészet fejlesztéseit főleg a bronzból készült eszközökön, fegyvereken, ruhadíszeken, használati tárgyakon találjuk.



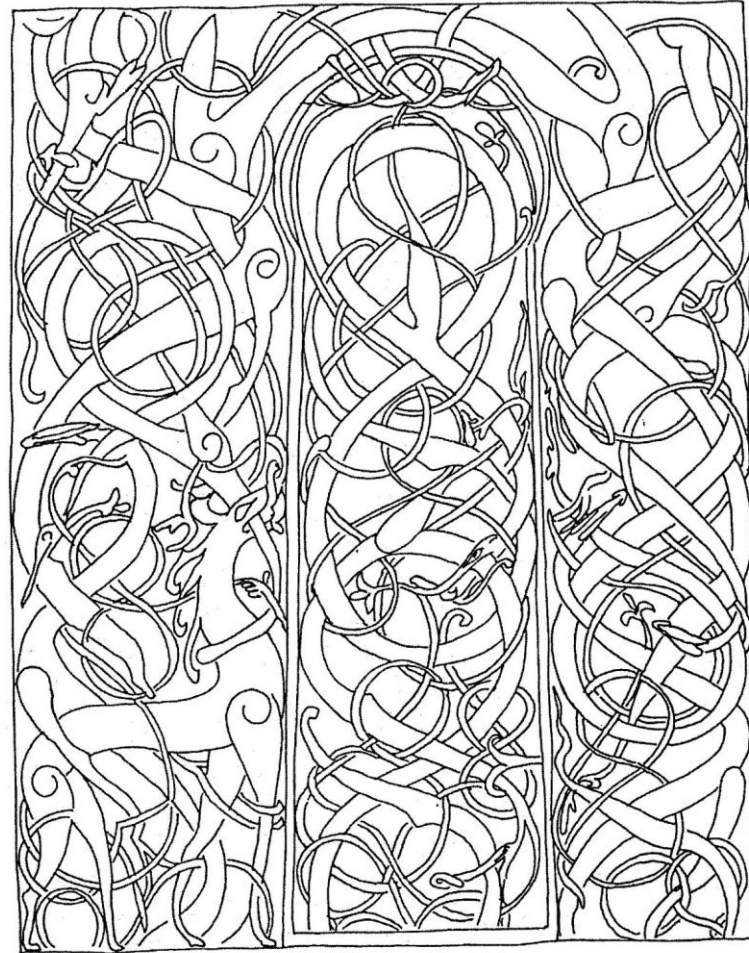
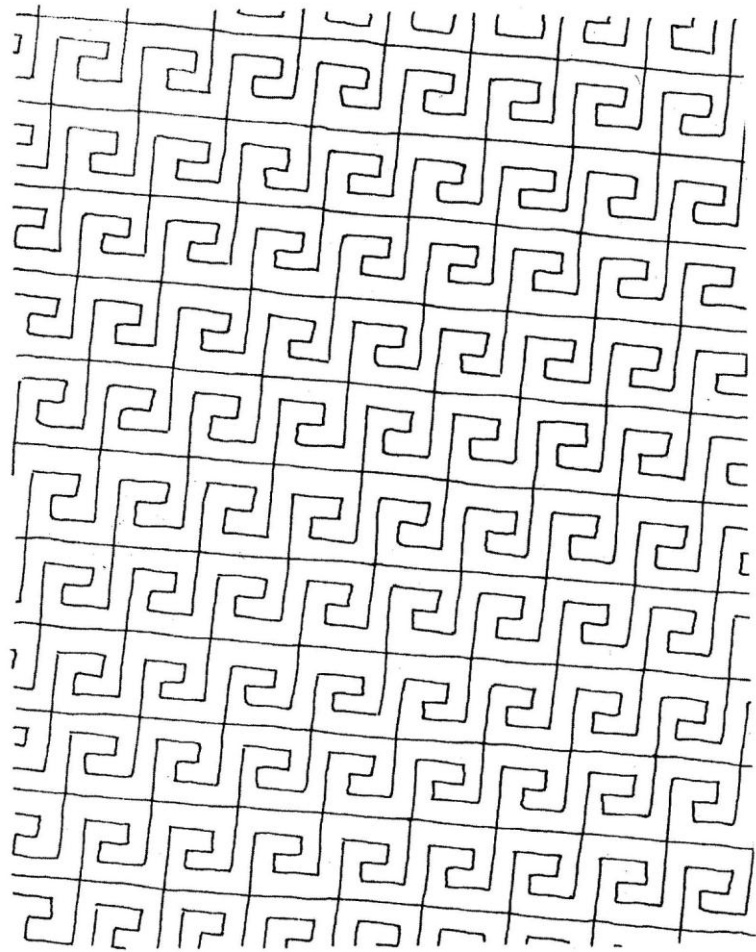
1. ábra. A négy egyenes menti mintacsoport egy-egy szomszédsági művelet-típussal (felülről lefelé): t – eltolással, g – csúsztatva tükrözéssel, m – tükrözéssel, 2 – félfordulattal.

A frízeken (szalagmintákon) egy egyenes mentén sorakoznak a szabályosan ismétlődő elemek. A minta geometriai rendje független az ismétlődő figurától. A szalagminták geometriai elrendezéseit különböző típusokba soroljuk. E típusokat azon műveletek alapján is meg lehet alkotni, amelyekkel az egyenes menti mintázat önmagára leképezhető és e műveletek alkotják a mintatípus szimmetriáját.

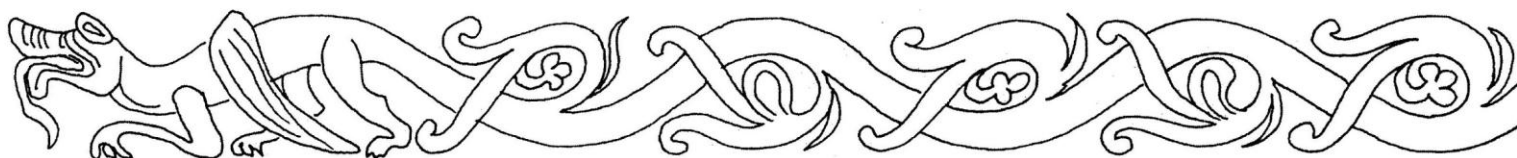
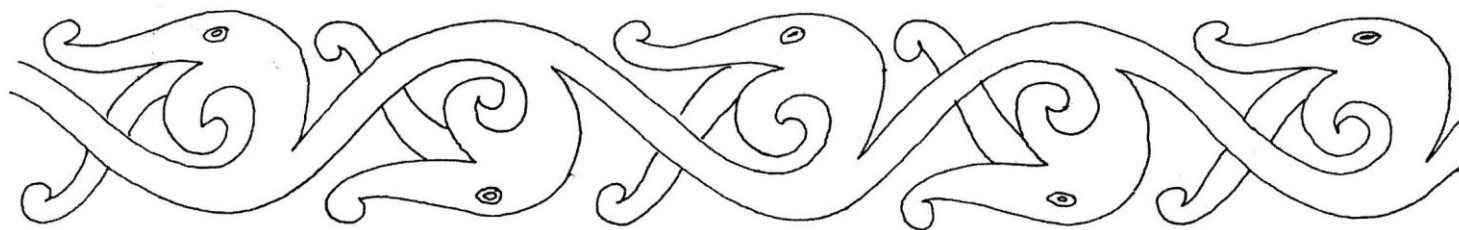
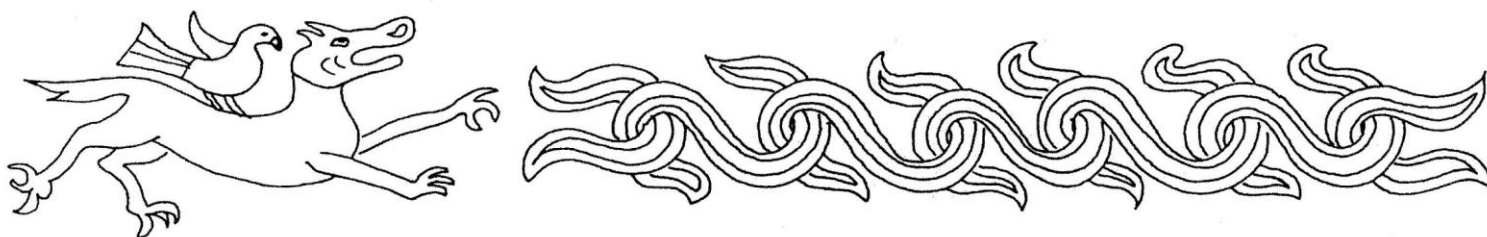
De szemléletesebb a mintákat építéssel létrehozni. A mintát építő lépés során a már meglévő elem melletti újabb elemet hozzuk létre (pl. egy bélyegzővel). A létrehozó lépésnél emlékeznünk kell a már meglévőre is. Ennél az eljárásnál azt mondjuk, hogy a szimmetria-művelet egy "szomszédsági művelet", mert a már meglévő elem szomszédját alkotjuk meg. A "szomszédsági művelettel" létrehozott szalagmintában a szomszédsági művelet a sík négyféle egybevágósági transzformációja lehet: eltolás, tükrözés, forgatás, csúsztatva tükrözés, valamint lehet ezek kombinációja is (1. ábra).



A szomszédsági műveletek említett 4 lehetőségével 4 egyszerű és 1 összetett mintasort kaphatunk. Az öt mintasort egység-szalagoknak is nevezhetjük. Közülük négyet a síknak csak egyféle egybevágósági művelete generálja, az ötödik pedig az ezekből összetett mg típus. Az első típust az eltolás (transzláció) generálja, jele t (a transzláció szóból). A másodikat a csúsztatva tükrözés (jele g , a kristálytani glide-reflection megnevezéssel összhangban), a harmadikat a tükrözés generálja, két párhuzamos, a fríz vonalára merőleges tükrözéspár. Jele m (mirror = tükör, nemzetközi jelöléssel). A negyedik egyszerű alapfríz a félfordulat hozza létre, két egymás utáni félfordulat, jele 2 - illeszkedve a kristálytani jelölésrendszerhez. Az ötödik alapfríz összetett, mert kétféle mozgás generálja: egy fél fordulat és a (szalagsávra merőleges tengelyű) tükrözés, jele mg . (A Schattschneider - Senechal-féle rövidített jelöléseket használjuk.) Az öt típust kétféle alapmintával soroljuk föl. A bal oldali oszlopban az avar kori, Szeged-kundombi övforgó mintaelemével, a jobb oldali oszlopban az aleppói kígyófonatos kapudísz (lásd pl. a Kisásziai művészetek füzetben) egy „kígyópereces” elemével.



Nagy felületek díszítését a múltban is igen sokféleképpen valósították meg a mesterek. Két jellegzetes megoldás áll itt előttünk: balra egy újkőkori ház meszelt agyagfalát díszítő végtelen síkbeli mintázatot láthatunk. Jobb oldalon a norvégiai Urnes fatemplomának szövevényes sárkányküzdelmi jelenettel díszített fafaragásos kapuját csodálhatjuk meg. A hullámzó sárkányos mintákból egyenes menti változatokat láthatunk a jobb lapon.



A szalagminták végére igen gyakran illesztettek sárkányokat. Számunkra legismertebb ilyen dísz a Bécsben őrzött Árpád házi királykincs, amit Atilla kardjának is neveznek. A kard vércsatorna veretének végén küzd egymással a két sárkány. Alatta három viking kori, északi sárkánydísz látható. Az alsó mintát akár virágdísznek is gondolhatnánk mindaddig, amíg ki nem tesszük a sárkányfej szemét jelző a pontokat (ahogy látjuk a fölötte futó sorban). Jómagam is így jártam az első rajzolatnál, az indáról lekanyarodó „virágfejekkel”, amíg egy másik múzeumban, egy hasonló mintázaton észre nem vettem a sárkányszemeket.

$C_{5(g-t)}$



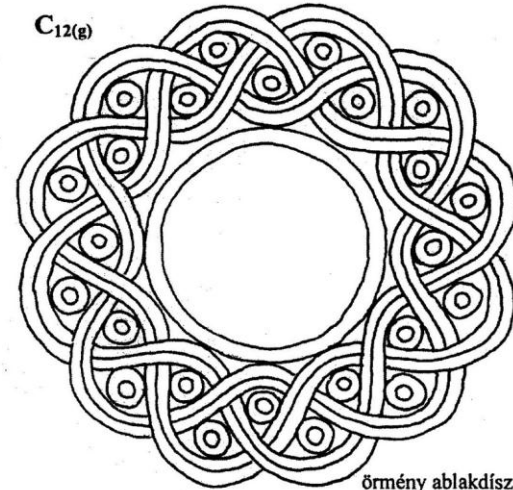
szkíta korong

$D_{18(m)}$



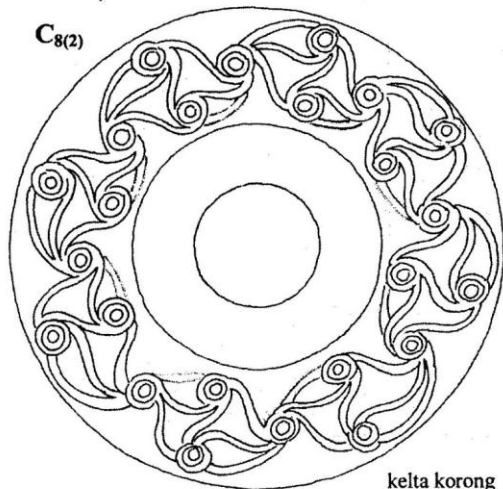
kelta korong

$C_{12(g)}$



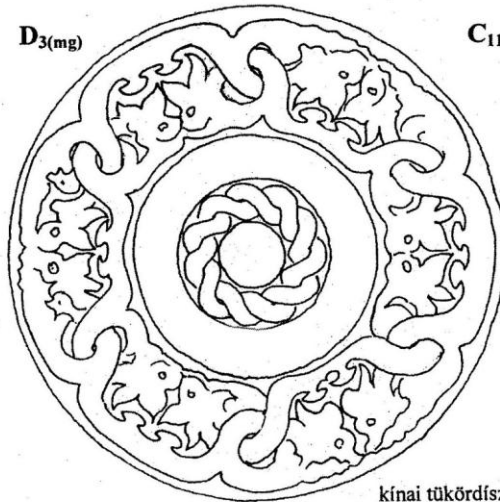
örmény ablakdísz

$C_{8(2)}$



kelta korong

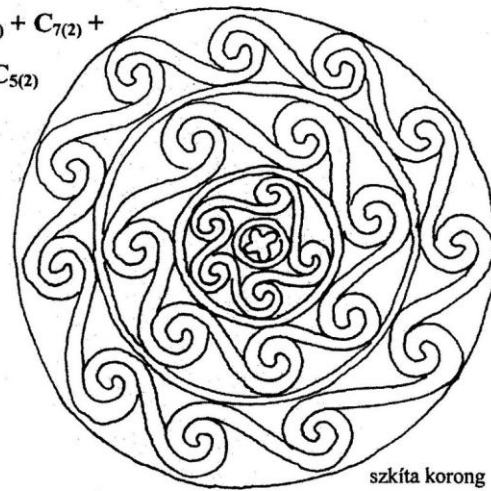
$D_{3(mg)}$



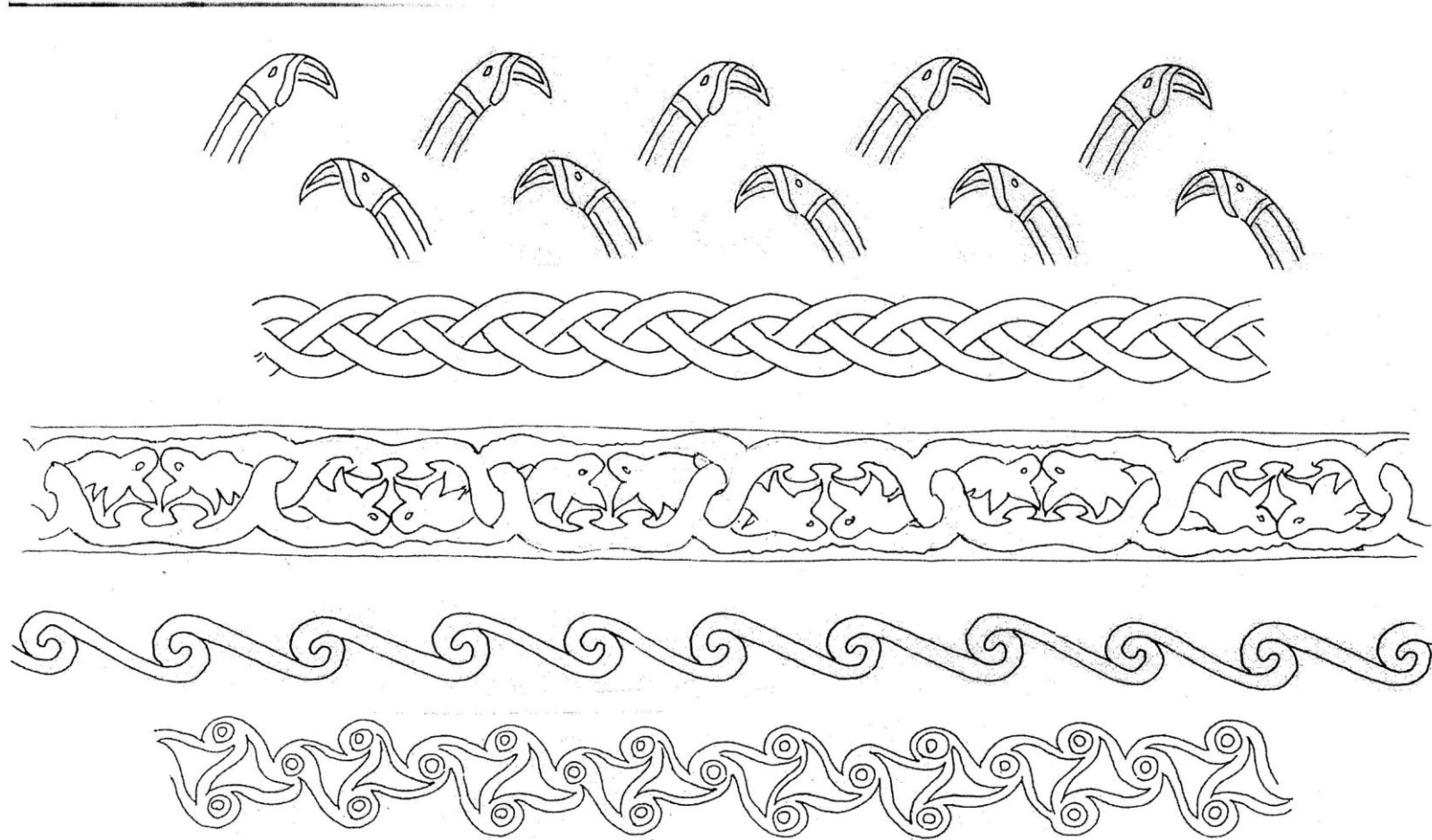
kínai tükördísz

$C_{11(2)} + C_{7(2)} +$

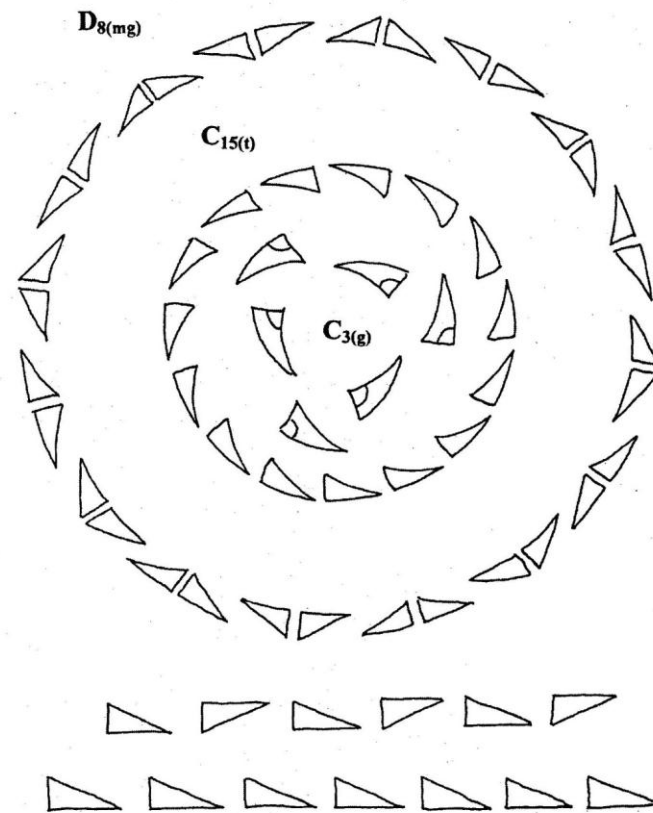
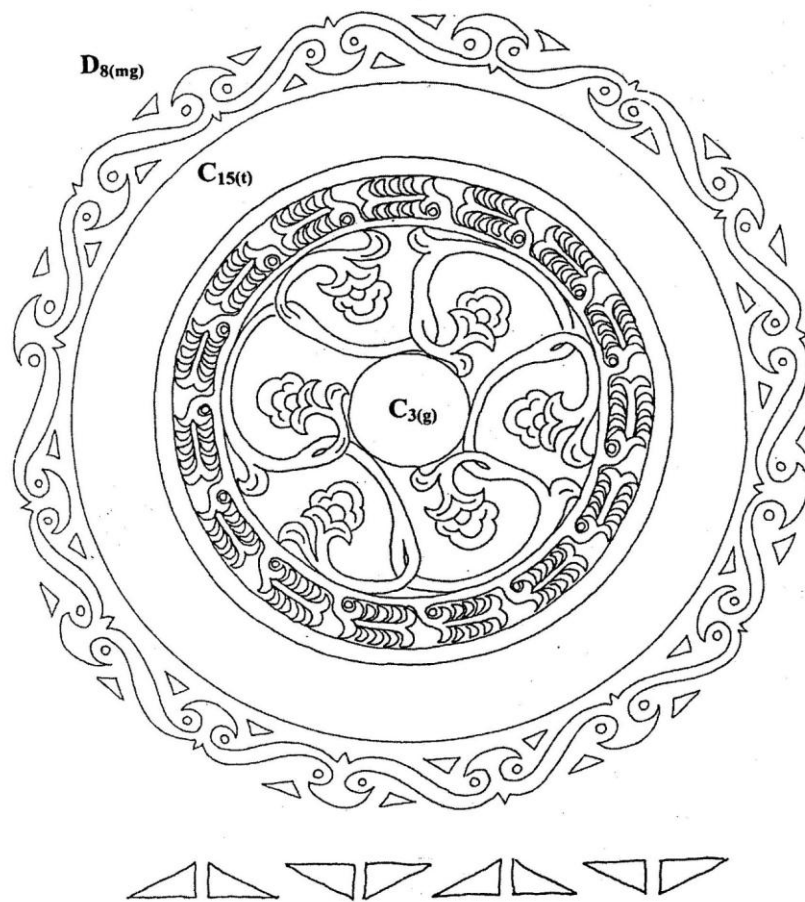
$C_{5(2)}$



szkíta korong



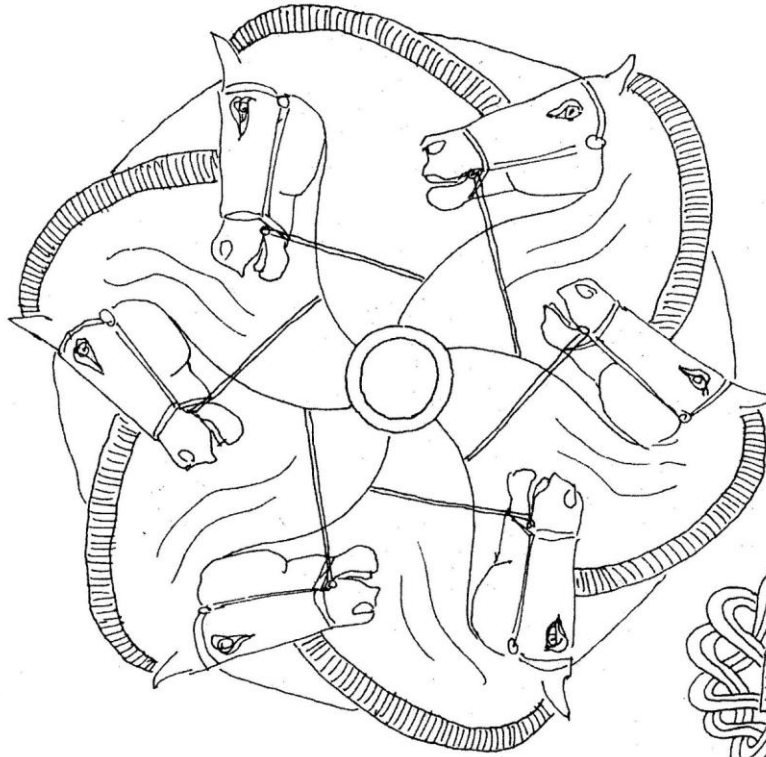
Gyakori a díszítőművészetben a kör alakban a tárgyra helyezett futó minta. Ha ezt gondolatban leválasztjuk és „kiegyenesítjük”, akkor egyenes menti szalagmintázatot kapunk. Ezért a forgási mintázatok nem csak a hagyományos C (forgási), vagy D (tükrözési) esetekre oszthatjuk föl, hanem azt is megadhatjuk, hogy a körszalag mintája milyen friztípus lesz, ha lefejtjük. A bal oldalon szereplő 6 körminta közül 5-nek a kiterített változata (transzformáltja) látható a jobb oldalon. Besorolva őket a már megismert típusok közé, a következőket látjuk. A bal felső szkíta madárfejes fríz egy kettősfriznek tekinthető, ezekkel a következő oldalakon ismerkedünk meg. Típusa g-t. Középen az emberfejes fríz m, a fonatos örmény templomi rózsablak-keret g típusú fríz. A bal alsó kelta minta félfordulatos (2), a középső kínai tükör peremén egy mg típusú fríz van körberajzolva. Jobb szélén félfordulatos (2) szimmetriájú frízeket látunk körbehaladni, három félt is. A minták tehát rendre: $C_{5(g-t)}$, $D_{18(m)}$, $C_{12(g)}$, $C_{8(2)}$, $D_{3(mg)}$, ill. $C_{11(2)}$ - $C_{7(2)}$ - $C_{5(2)}$, szerkesztettek. Itt a zárójelben szereplő kifejezés a frizmintára utal.



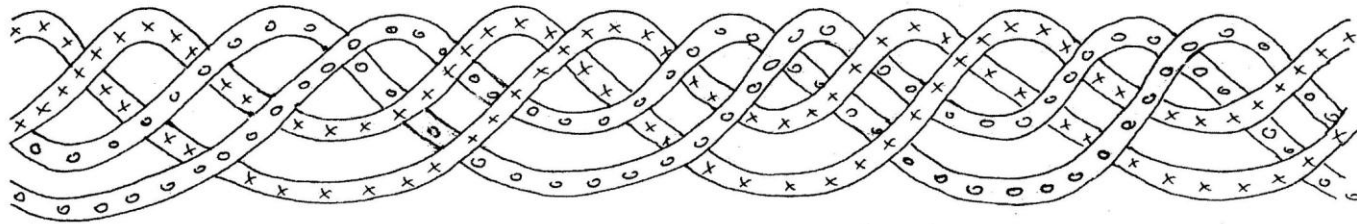
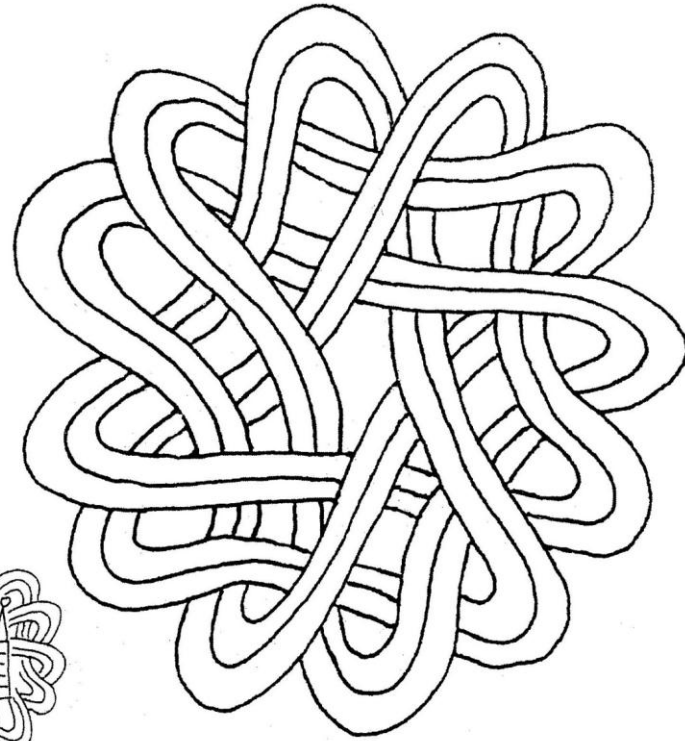
Körmintázat a kelta korból, egy tálról, Pilismarótról. A mintázat csontvázát háromszögekkel külön is ábráztuk, körbefutón is, kiterítve is.

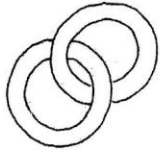
C6(t)

Falera a Bratoljubzki Kurgánból, Ukrajnából.

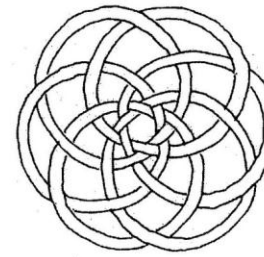
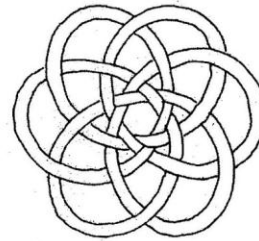
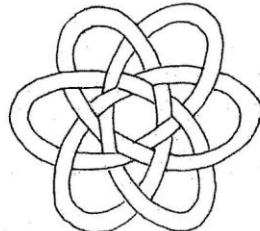
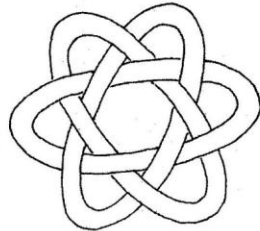
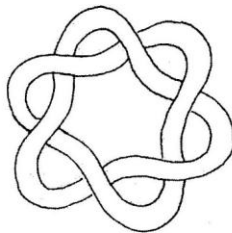
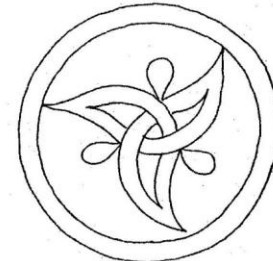
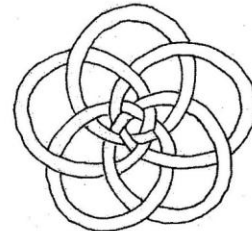
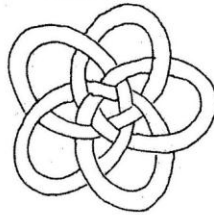
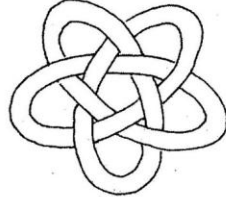
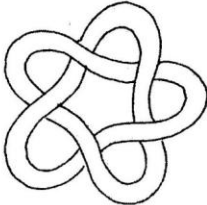
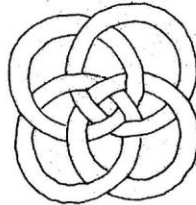
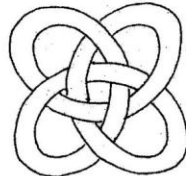
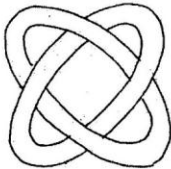
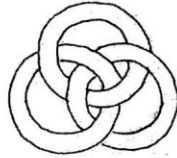
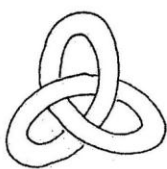


Csomódsz Krétáról, mintázata alul van kiterítve.





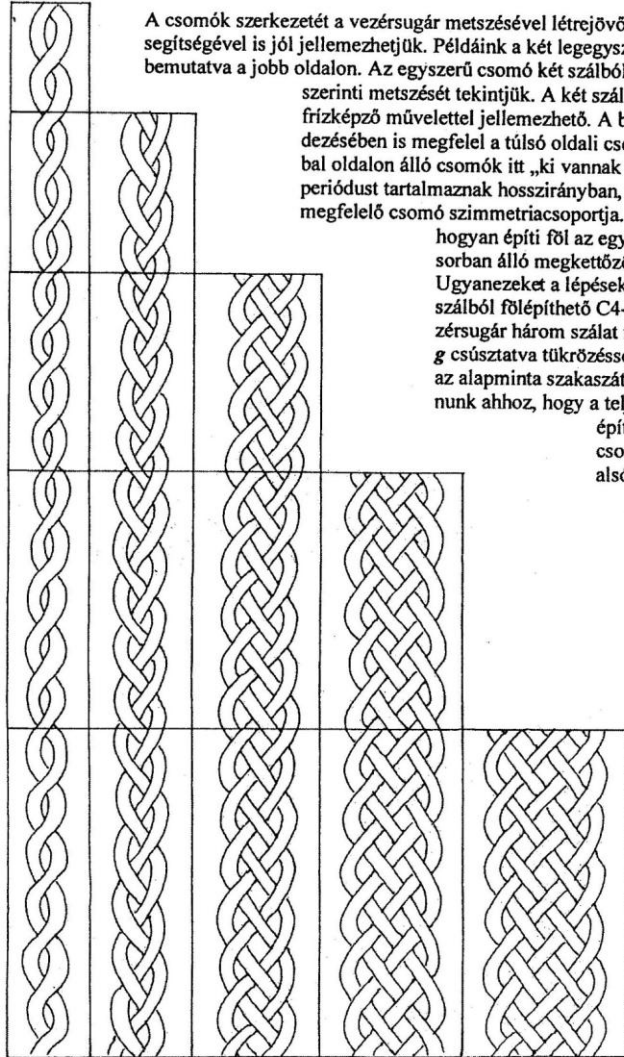
Az egyszerű csomók táblázata, aszerint elrendezve, hogy a középpontból kiinduló vezérsugár hány szálát metsz el (az oszlopok az egy szál, két szál stb. sorrendjében haladnak), illetve aszerint, hogy hány forgással lehet a csomót önmagával fedésbe hozni (ez a sorok rendje, felülről lefelé a 2, 3, 4, 5 és 6-os forgású sorok következnek).



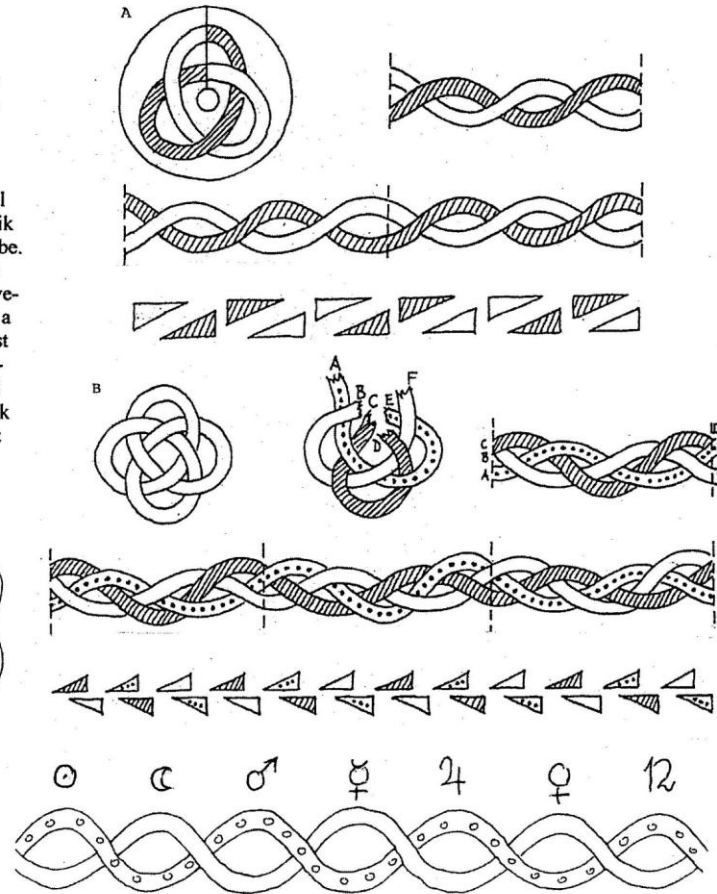
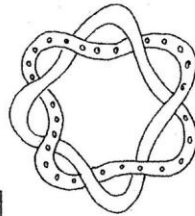
Tolstrup, Jutland,
Dánia

Forgásszimmetrikus csomók csoportosítása a középpontból húzott vezérsugár által elmetszett szálak száma, valamint a forgáscsoport rendje szerint

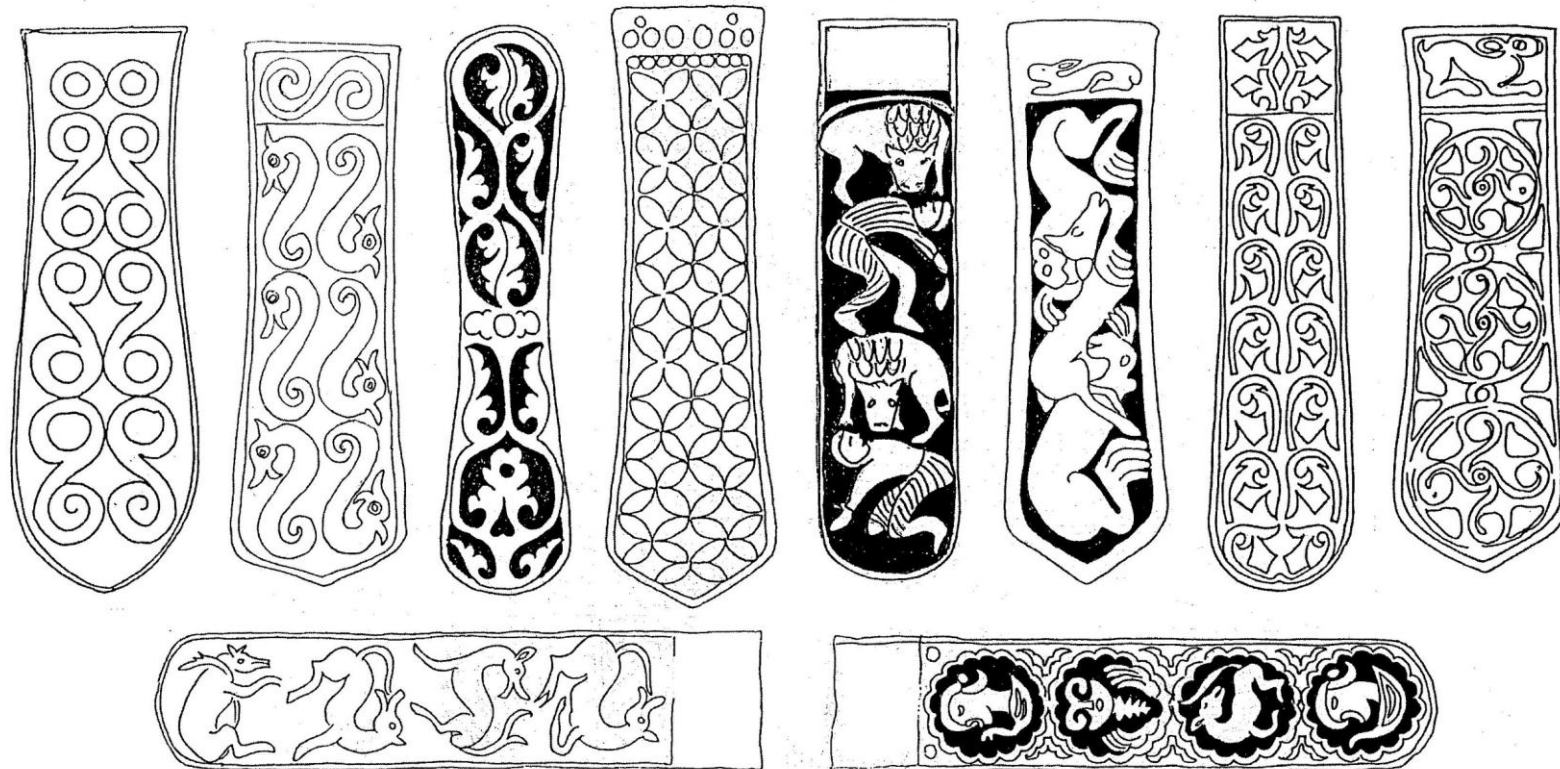
	2 szál sodrata	3 szál fonata	4 szál	5 szál	6 szál
C_2	$C_{2(2)}$ kör-gyűrűk				
C_3	$C_{3(2)}$ „perecek”	$C_{3(3)}$ kör-gyűrűk			
C_4	$C_{4(2)}$	$C_{4(3)}$ „perecek”	$C_{4(2^*)}$ kör-gyűrűk		
C_5	$C_{5(2)}$	$C_{5(3)}$	$C_{5(2^*)}$ „perecek”	$C_{5(3^*)}$ kör-gyűrűk	
C_6	$C_{6(2)}$	$C_{6(3)}$	$C_{6(2^*)}$	$C_{6(3^*)}$ „perecek”	$C_{6(2^{**})}$ kör-gyűrűk



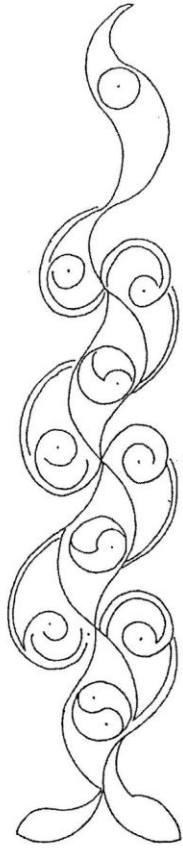
A csomók szerkezetét a vezérsugár metszésével létrejövő ismétlődő elemek segítségével is jól jellemezhetjük. Példáink a két legegyszerűbb esetre vannak bemutatva a jobb oldalon. Az egyszerű csomó két szálból áll, ha a vezérsugár szerinti metszését tekintjük. A két szál a 2 félfordulattal, mint frizképző művelettel jellemezhető. A bal oldali táblázat elrendezésében is megfelel a túlsó oldali csomók táblázatának. A bal oldalon álló csomók itt „ki vannak egyenesítve”, és annyi periódust tartalmaznak hosszirányban, ahány fordulatú volt a megfelelő csomó szimmetriacsoportja. Azt, hogy egyetlen szál hogyan építi föl az egyszerű csomót, a második sorban álló megkettőzött szálszakasz mutatja be. Ugyanezeket a lépéseket mutatjuk be a három szálból fölépíthető C4-es csomó esetén is. A vezérsugár három szálát metsz el. Ezek a szálak a g csúsztatva tükrözéssel alkotnak frizt. Itt most az alapminta szakaszát meg kell háromszoroznunk ahhoz, hogy a teljes mintát egyetlen szál építhesse föl. A szerkezetek csontvázát is ábrázoltuk az alsó sorban.



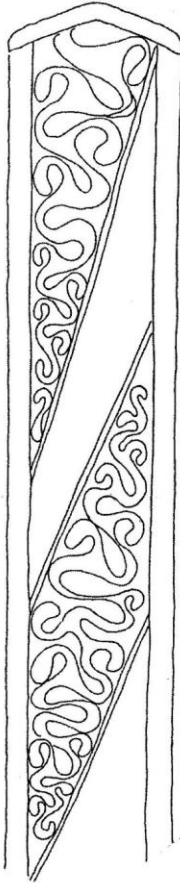
A hét napjainak valódi sorrendjét egy olyan hetes fonaton tudjuk jól ábrázolni, amelyet két szálnak a 2 félfordulattal, mint frizképző művelettel jellemezhető forgásmintájával hozunk létre. A kiterített hullámpáron a felső pontra helyeztük el a hét napjainak nevét adó bolygót. A kipontozott szálon haladva a Naptól való helyes távolodási rendjüket kapjuk meg úgy, hogy a Nap helyére kerül a Föld.



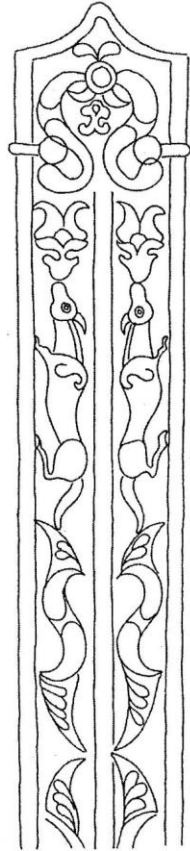
Az avar kori szíjvégek díszítómintázata rendkívüli változatosságú. Különösen a késő avarnak, vagy griffes-indásnak is nevezett korszak bronzból öntött szíjvégei mutatnak érdekes kettős-szalagú mintázatokat. A tíz itt bemutatásra kerülő szíjvéget a következő lelőhelyek avar temetőiből gyűjtötték a régészek: (balról jobbra haladva) Keszthely, Zala megye (*m-mg* típus); Kenyhec, Abaúj megye (*2-1* típus); Szeged-Kundomb, Csongrád megye (*m-g* és *2-2* típus); Tiszafüred, Jász-Nagykun-Szolnok megye (*m-m* típus); Nagysurány, Nyitra megye; Kishegyes, Bács megye; Győr, Győr-Sopron-Moson megye (*m-g* típus); Klárafalva, Csongrád megye; (a két fekvő alak): Székkutas, Csongrád megye.



Lough Crew
Meath
Írország



Litér
Veszprém
megye



Waldal-
gesheim
Németország



Lisna-
crogher
Írország



Kiskőszeg
Baranya
megye



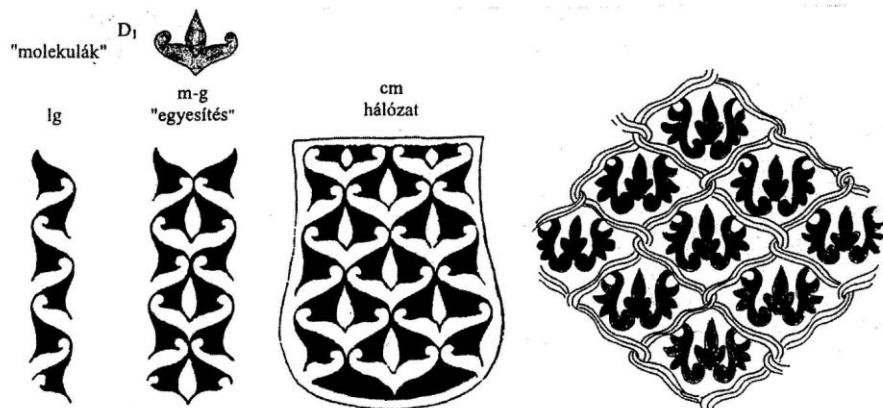
Stenkyrka Lillbjors, Gotland, Svédország

SZALAGMINTÁK MEGKETTŐZÉSE: A KETTŐS-SZALAGOK (KETTŐS-FRIZEK) TÁBLÁZATA

A szalagmintázatok megkettőzésével elkezdjük a mintázat továbbépítését a síkon. Ilyenkor a mintázat leírásához már nem lesz elég egyetlen szalag építésének a művelet-együttese. A szalagra merőleges szomszédot egy másik művelettel hozzuk létre. A már meglévő szalagon a minta szervezését a szalag irányában végeztük. A megkettőzést a szalag irányára merőlegesen olyan szomszédosági művelettel végezzük, amelyik szintén a sík négyféle egybevágósági művelete lehet: Az öt egység-szalagból a négyféle egybevágósággal összesen 20-féle kettőzött fríz állíthatunk elő. Ez lesz a kettősfrizek osztályozásának az alapkészlete.

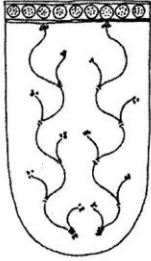
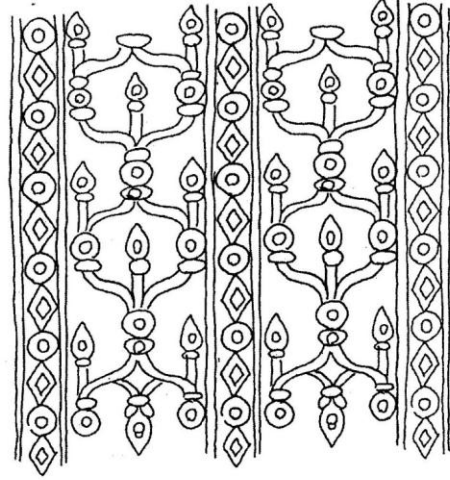
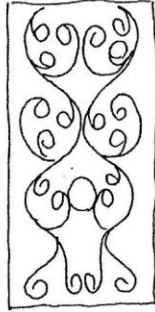
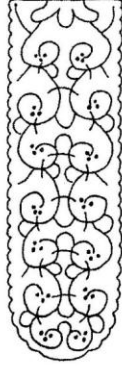
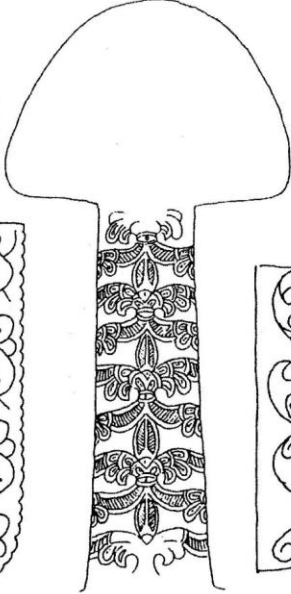
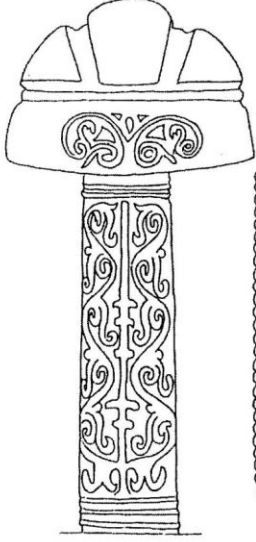
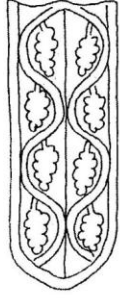
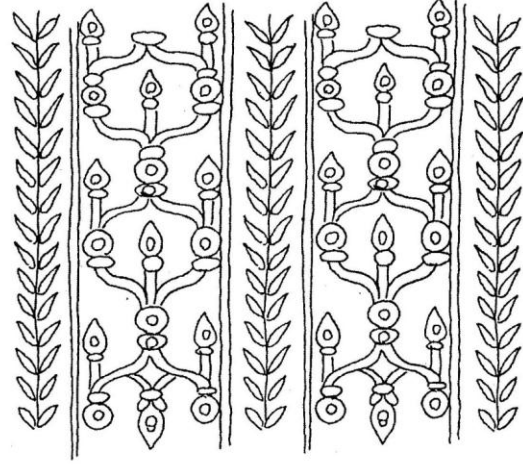
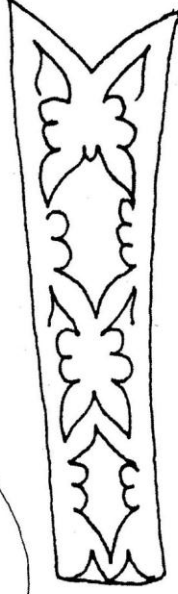
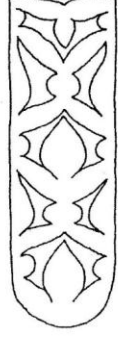
A 20 kettőzött szalag (kettős-fríz) alkalmas összehasonlító készlete lehet a különféle népek (műveltségi közösségek) díszítőművészetének. (Bérczi, 2000, 2005, 2007). Szemközti ábránkon, középen, a kettősfrizek alpmintázatait táblázatosan rendeztük el. A lefelé futó szálakat a sík egybevágósági transzformációi: eltolás, tükrözés, forgatás, csúsztatva tükrözés, valamint a jobb szélső oszlopban ezek kombinációi (mg) szervezik. Oldalirányban a kettőzést szintén e négy egybevágósági művelet, betűjelével a *t*, a *g*, az *m* és a *2* végzi. A jelölésben az első betű a kettőző műveletet jelöli, a második az alapfríz.

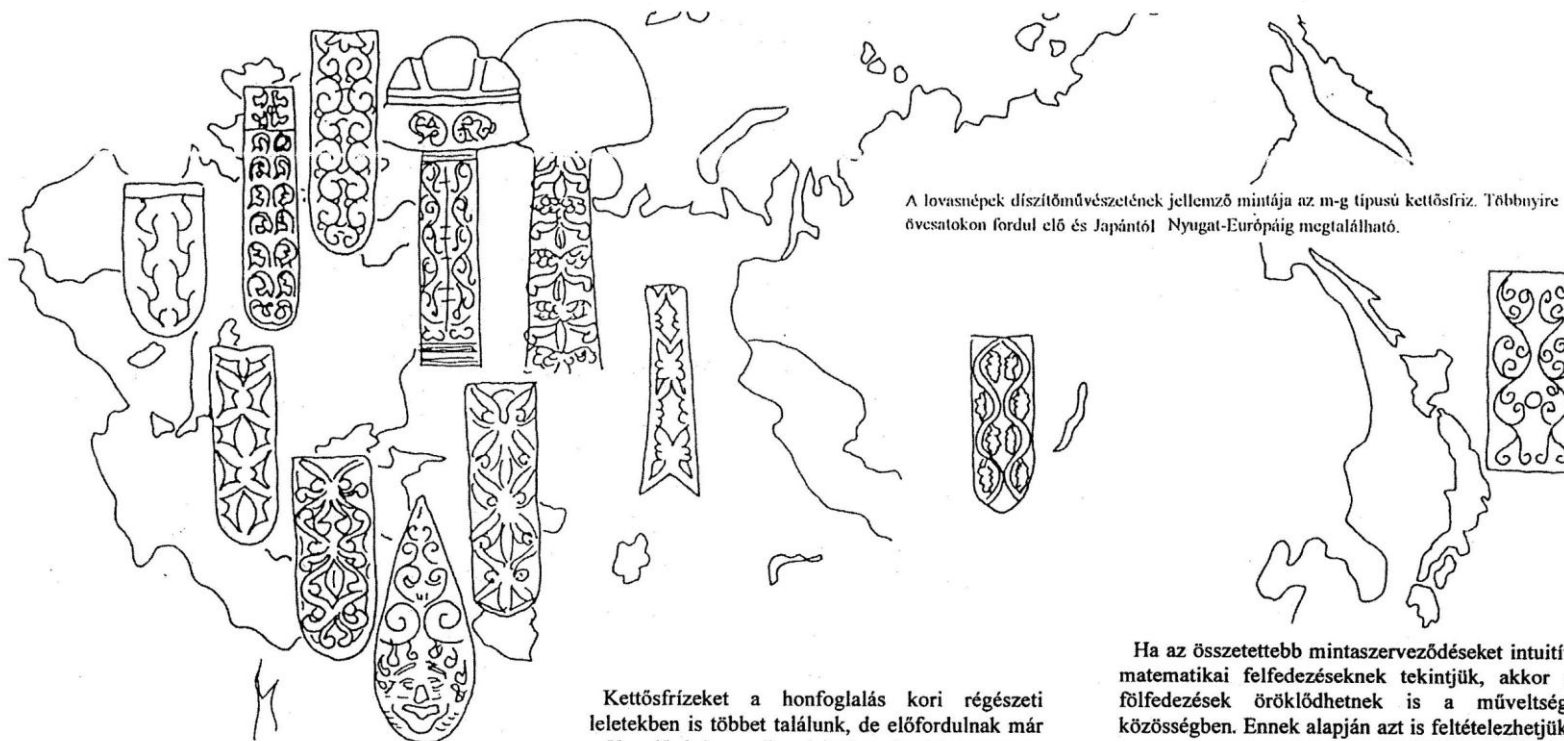
A szemközti oldalon látható ábra három nagy tömbből áll. A bal oldalon, táblázatosan bemutatjuk azokat a kettőzött szalagmintákat, amiket az avar kori sírokban lelt régészeti leletekről gyűjtöttünk. (Bérczi, 1989). A leletek lelőhelyei: *t* – Nagymágocs-Ótompá, (Csongrád m.); *g* – Mártély, (Csongrád m.); *2* – Klárafalva, (Csongrád m.); *t-2* – Tiszafüred-Majoros, (Szolnok m.); *m-t* – Csúny, (Moson m.); *m-g* – Győr, (Győr-Sopron-Moson megye); *m-m* – Nemesvölgy, (Moson m.); *m-2* – Óföldsé, (Csanád m.); *m-mg* – Keszthely, (Zala m.); *2-t* – Regöly, (Tolna m.); *2-g* – Tiszafüred-Majoros, (Szolnok m.); *2-2* – Szeged-Kundomb, (Csongrád m.). A középső tömbben a táblázatok szerkezeti csontvázát mutatjuk be: a mintázatok szerkezetét egyetlen háromszög-elemmel fölépítve a mintát. Az ábra jobb oldalán táblázatosan mutatjuk be azokat a kettőzött szalagmintákat, amiket a kelta régészeti leleteken gyűjtöttünk össze. A leletek lelőhelyei: *t* – Amfreville-sous-les-Monts (Fr); *g* – Litér, (Veszprém m.); *m* – Jenisuv Ujezd (C); *2* – Lisnacrogher (2), Antrim (Í); *mg* – Stettlen-Deisswil, (Switz.); *g-g* – Mullaghmast, (Í); *m-m* – Waldalgesheim, (D); *m-2* – Wisbech, Cambridgeshire E); *m-mg* – Lisnacrogher (2), Antrim (Í); *2-t* – St. Jean-sur-Tourbe, Marne (Fr); *2-g* – Lough Crew, Meath, (Írország); *2-m* – Jenisuv Ujezd (C).



2. ábra. Az Árpád kori honfoglaló magyarok díszítőművészeténél is jól megfigyelhető a mintaépítés szerkezeti rendszere. Az egyre összetettebb formájú mintaszerveződés kiindulása egy *g* típusú fríz vagy egy megkettőzött palmetta-elem. A „lábnyom-szerinti” *g* típusú szalag (fríz) tükrözéssel megkettőzött *m-g* változata is előfordul, főleg szíjvégeken, nyereg- és íjgezcsontfaragványokon. A tükröző egyenessel végzett kettőzést folytatva a tarsolylemezek síkra kiterjedő mintázatához jutunk (László, 1943). További lépés az, hogy a mintázat szétválik egy hálózatra, és a benne helyet foglaló „pontoszerű” minta rácsára. E kétféle mintázat másféle szerkezetű lehet. Példaként a Gyulafehérvári Székesegyház déli kapujának oszlopán látható összetett síkszimmetria mintázatát mutatjuk be (Bérczi, 2004). Itt a hálózat *pgg* szerkezetű rácsába helyezték el a *cm* szerkezetű palmetta csokrokat. Ez a mintaszervezési rendszer megtalálható a hun, a xiongnu (ázsiai hun), a szkíta és más sztyepei lovas népeknél is. Ezekből több bemutatásra került már az Eurázsiai művészetek sorozat füzetében.

A leggyakoribb a sztyepei művészetben az *m-g* kettősfríz, amely Eurázsia számos lelőhelyéről előkerült régészeti leleteken. Felső sor, balról: Kul Oba, Jaszinova, Andrjukovszkaja Sztanica, Győr, Szeged, Vjatka v. Szibéria, Melgunov k.; Középső sor (2 db): Minuszinszk, Vjatka f.; Alsó sor: Párizs, Varsó, Koppenhága, Kijev, Tokió (Nemzeti Tört. Múzeum), Kelermes k. (Bérczi, 2005). Ugyancsak előfordult, egymástól távoli lelőhelyeken a *t-2* kettősfríz is (Bérczi, 2000). Ahogy 2. ábránk is mutatja, az *m-g* kettősfríz az összekötő láncszem a *g* mintázat és a síkra kiterjedő és igen gyakori *cm* síkbeli szimmetria mintázat között.





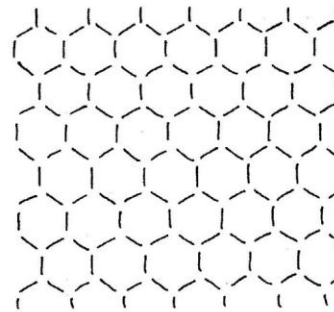
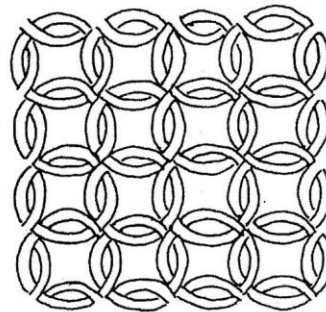
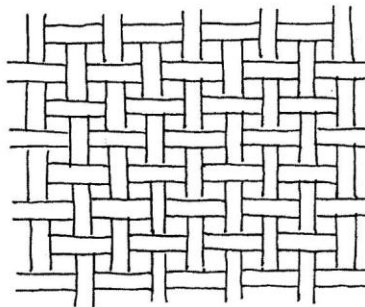
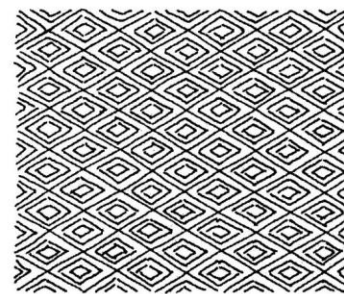
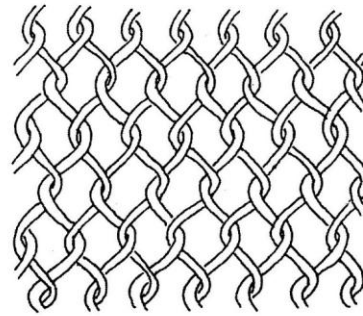
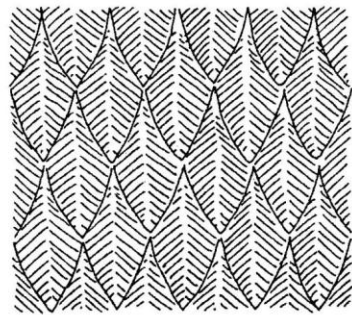
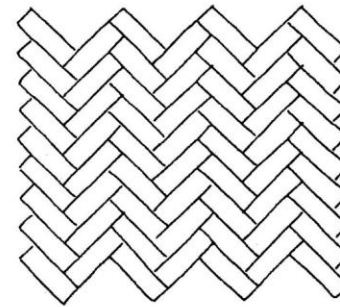
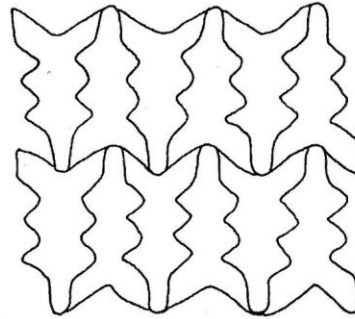
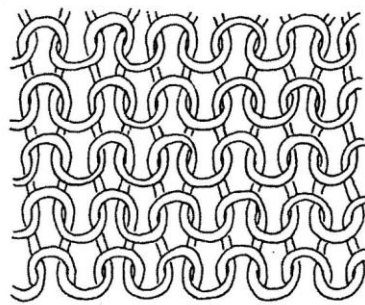
Az m-g kettősfríz elterjedtsége az eurázsiai díszítőművészetben

Az ókori eurázsiai díszítőművészetben a lovas népek fontos felszerelési tárgya volt a díszesen kiképzett szíjvég. A rajtuk látható mintázat szerkezete gyakran kettősfríz. Különösen a kései avarok (avar-onogurok) ötvösművészete igen gazdag *kettős*-frízekben. A kettősfríz két, egymás mellett párhuzamosan elhelyezkedő (és egymásból levezethető) mintasorból áll.

Kettősfrízeket a honfoglalás kori régészeti leletekben is többet találunk, de előfordulnak már a Kr. előtti évezredben is a hunoknál keleten. Az avar-kori griffes-indás és a honfoglalás-kori palmattás mintázatú régészeti leleteken a hosszanti tükrözéssel kialakított minták a leggyakoribbak, ezek közül is a tükrözéssel megkettőzött ún. m-g típus a legkedveltebb, amelyet sokfelé másutt is megtalálunk Euráziában.

A kettősfrízek gazdagsága részben a technológiákban születő mintázatok ismeretén alapulhatott, részben az intuitív díszítőkedvől fakadhatott. Különös példa a szeged-kundombi 285. sír övforgója, melyen a *t*, *g*, *m* és a *2* egybevághósági műveletek mind előfordulnak.

Ha az összetettebb mintaszerveződések intuitív matematikai felfedezéseknek tekintjük, akkor e felfedezések öröklődhetnek is a műveltségi közösségekben. Ennek alapján azt is feltételezhetjük, hogy a díszítőmintázat matematikai gazdagsága öröklődő jellemzője lehet a közösségnek. A matematikai tudáskincs beágyazódik az anyagszerkezetekről szerzett tudásba. Ha például a sorminta megkettőzését folytatjuk és a teljes síkra kiterjedő szerkezetet kapunk, akkor a díszítőminta építését sorokból és oszlopokból, szövés technológiai elven (a díszítősorok „megszövéseivel”) végezzük el. Síkbeli mintázatok és a sormintázatok kapcsoltsága is megerősíti azt, hogy nem egyedi a mintázatok sokféleségében rejlő szerkezeti tudás, hanem rendszert képez az eurázsiai népek ismeretei között.



Az alapminta sorok megkettőzését folytatva a teljes síkra kiterjed a minta. Az alaptípust képező díszítőminta sorokból szövés technológiai alapelven, a szalagot képző alapfríz díszítősorok „megszövéseivel” végezhetünk mintázat-építést. Így jutunk el a síkbeli mintázatokhoz. A jobb oldalon néhány kettőzött szalagminta mellé elhelyeztük a hozzá tartozó síkbeli szimmetria mintát.

Síkbeli mintázatok gazdagon előfordulnak az eurázsiai lovas népek régészeti anyagában, leggyakrabban nyeregtakarókon, szőnyegekben, ruházatokon.

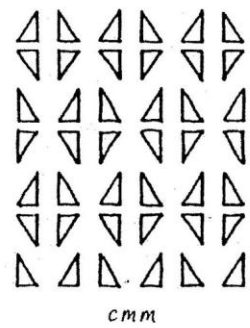
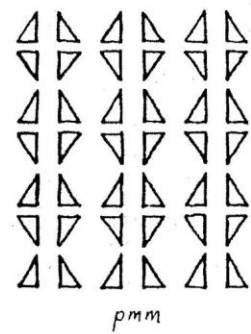
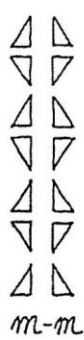
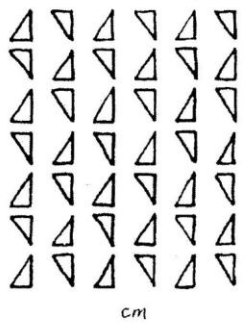
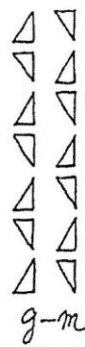
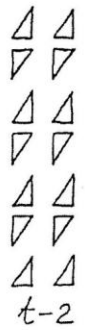
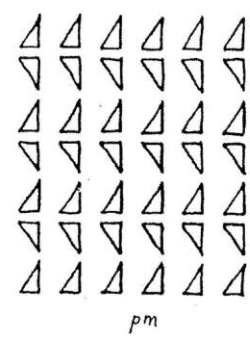
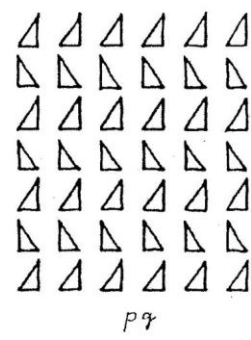
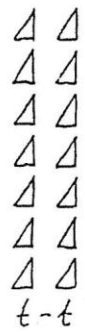
A síkbeli szimmetria mintázatok, különösen pedig a hálómintás szerkezet később az épületszobrászati díszítéseken jelenik meg, például oszlopfaragásokon.

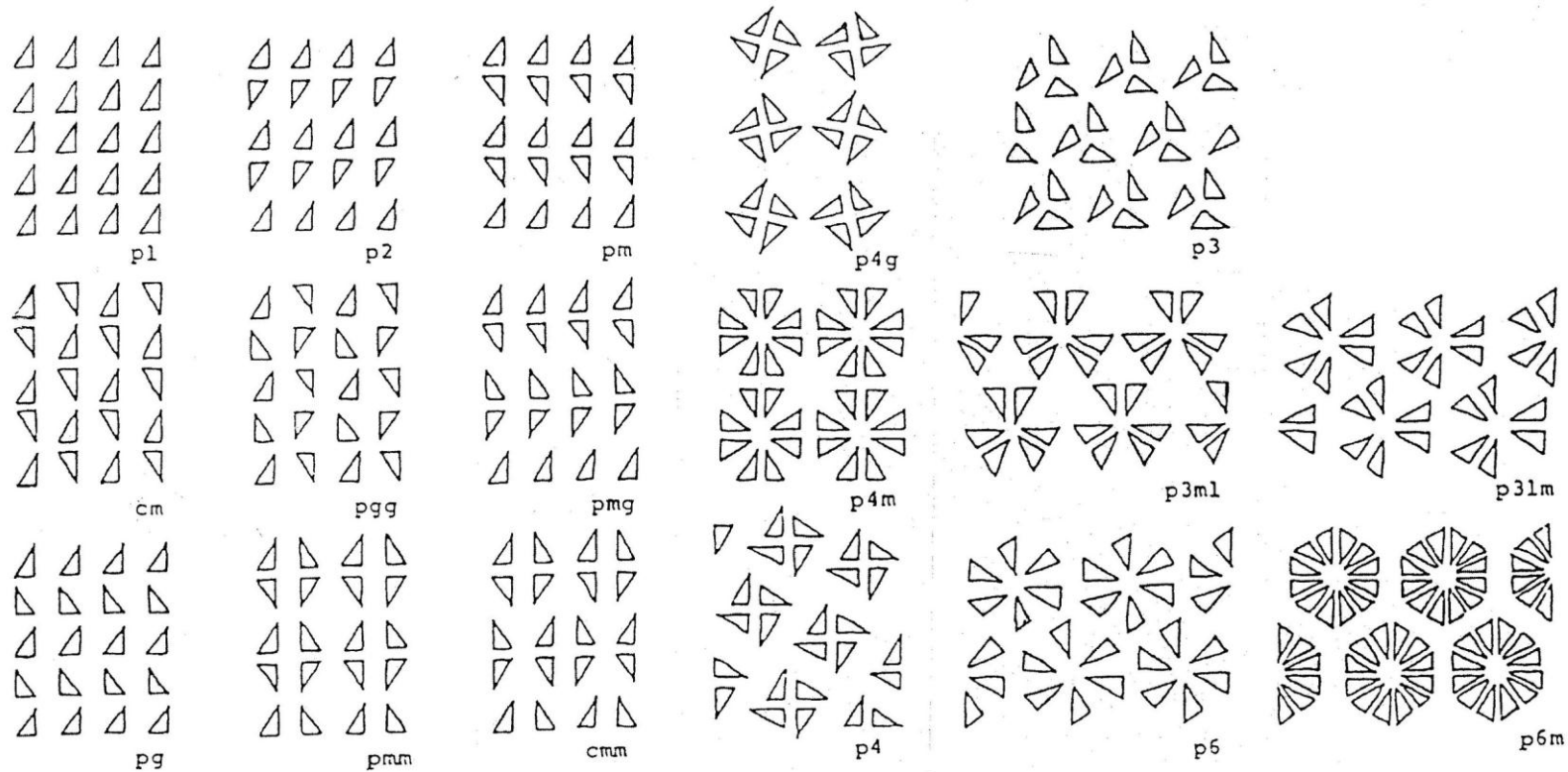
Mutatja az eurázsiai díszítőművészet gazdagságát, hogy gyakran nem egyetlen szerkezetű mintázat alkotja a felület díszítését, hanem többféle síkbeli szimmetria minta szerkezetből vannak összetéve a felületminták.

Füzetünkben síkmintázatokra szedjük szét az összetett szerkezeteket, de a hordozó falfestményeket, szőnyegekben egészükben is bemutatjuk.

A bal oldalon a hétköznapok iparaiban megszülető síkbeli mintázatokból és a természet alkotta síkmintázatokból mutatunk be egy válogatást.

Ismétlődő egybevágó elemekből a technológiákban összeállításkor létrejövő, illetve a természeti jelenségekben megfigyelhető mintázatok típusai: horgolási mintázat – pmg, rókabőr-
illesztési mintázat – pmg, parketta – pgg, madártollazat – cm, drótkerítés hálómintázata – pgg, hüllőbőrmintázat – cmm, sávolykötésű szövés – p4g, láncinghurkolás – p4,
méhsejtmintázat – p6m.



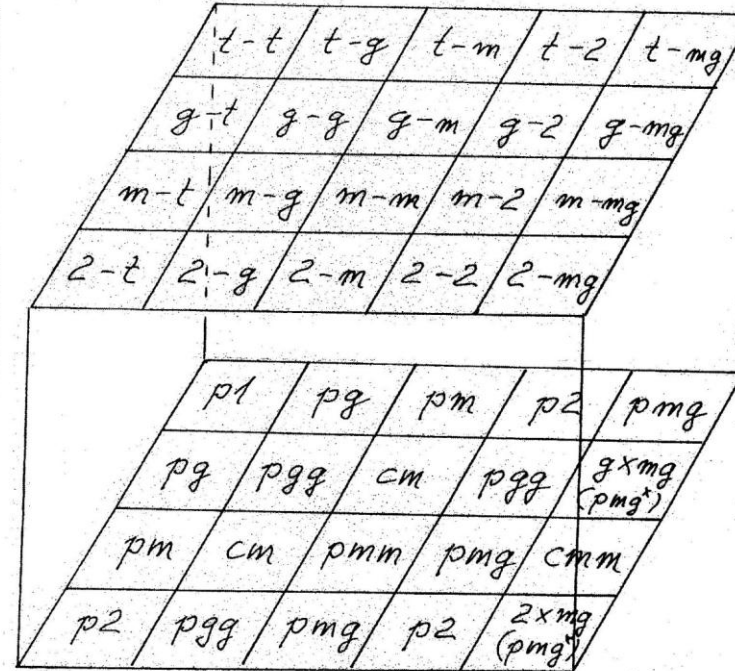


A 17 síkszimmetria mintázat csontváza. Ezek közül a bal oldali blokkot alkotó kilenc típus szöhető meg az alapfrízekből, ahogyan ezt a jobb oldalon látható táblázatban bemutatjuk. E táblázatban mátrixelrendezésben vannak elhelyezve az alapfrízekből előállított kettős-szalagok is és a megszővésükkel nyert tapétatípusok is. Az oszlopokat a kiindulási egység-szalagok alkotják, a sorokat a kiindulási egység-szalagokra merőleges irányban melléjük gyártott szalagok. (mindegyik a matematikai jelével van képviselve). A sor-oszlop metszéspontokban elhelyezkedő mátrixelemek adják meg a két szalagminta "szöveteként" előállt síkbeli mintát a kristálytani jelöléssel. Érdemes észrevenni, hogy a szövással létrejött húsz eset között több egyezőt találtunk. Ezért azt is láthatjuk, hogy az síkminták egyezése miatt a mátrix a főátlóra szimmetrikus. (A főátlót a *t-t*, a *g-g*, az *m-m* és a 2-2 kettősfríz is jelölik.) A korábban már megismert kettősfríz mátrix kiegészül egy olyan utolsó sorral, amelyben az egység-szalagra merőleges szervezőműveletek - az *mg* típusra jellemzően - fél fordulat és tükrözés változásával építik tovább a síkra kiterjedő egység-szalagot. Ezzel jutunk el a megszőtt síkminták négyzetes szimmetrikus mátrixszámához. Az X-szel jelölt esetek már nem ismétlődő elemeikkel alkotnak tapétacsoportot, hanem az azokból összeálló kettes vagy négyes elem-csoportjaikkal (minta-molekuláikkal).

Sík-kettősfríz táblázat

Sík-szimmetria típus		Oszlopírány	fríz típusok	szövik meg	a síkmintát						
Kettősfríz											
	Egység-szalag minták	t	g	m	2	mg					
transzláció (eltolás)	t	t-t	p1	t-g	pg	t-m	pm	t-2	p2	t-mg	pmg
csúsztatva tükrözés	g	t-t	pg	t-g	pgg	t-m	cm	t-2	pgg	t-mg	g X mg
tükrözés	m	g-t	pg	g-g	pgg	g-m	cm	g-2	pgg	g-mg	g X mg
félfordulat	2	m-t	pm	m-g	cm	m-m	pmm	m-2	pmg	m-mg	cmm
félfordulat + tükrözés	mg	2-t	p2	2-g	pgg	2-m	pmg	2-2	p2	2 X mg	2 X mg
			pmg	g X mg	cmm					2 X mg	mg X mg

Érdekes külön-külön is bemutatnunk a kettősfríz mátrixot is, és a síkszimmetria mátrixot is. A kettősfrízről már szerepelt táblázatunkban (ez a felső táblázat) a sor-oszlop metszéspontokban a jelölésben elől álló művelet a kettőző művelet. A jelölésben hátul álló művelet az, ami az alapfríz hozta létre. Például $m-g$ minta esetén m , vagyis a tükrözés művelete az, ami megkettőzi az eredeti szálát. Az eredeti szál pedig a g szál. Az $m-g$ típust jelölő táblázati elem alatt találjuk a cm síkszimmetria mintázatot. Ez már az m művelet többszöri alkalmazásával (több lépésben hoztuk létre g szálát az előzőleg már elkészült szál alapján) az $m-g$ kettősfríz nyomán létrejövő alakzatrendszer típusát jelöli. A felső táblázat minden kettősfríz mátrixeleme alatt megtalálható a hozzá tartozó síkszimmetria mintázat is, a matematikai jelével magadva, az alsó táblázatban. A sík-kettősfríz táblázat e két, egymás alatti táblázat egyesítését tartalmazza. A jobboldalon egymás alatt elhelyezkedő két táblázathoz képest csak annyi a különbség, hogy a kettősfríz mátrix kiegészült egy utolsó sorral, amelyben az egység-szalagra merőleges szervezőműveletek az mg típusra jellemző fél fordulat és tükrözés váltakozásával építik tovább a síkra kiterjedő egység-szalagokat.



Felső táblázat: kettősfrízek táblázata.

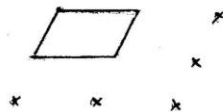
Alsó táblázat: síkszimmetria mintázatok táblázata.

Az egymás alá eső táblázati mezők egymás megfelelői. A kettő közötti kapcsolat a kilenc megszűhető síkbeli szimmetria-mintázat esetére az előző tükrözés jobboldalán részleteztük. A szövegközi 2. ábrán az $m-g$ és cm esetre bemutattuk be az építkezés sorozatát a g frízről, az $m-g$ kettősfrízen át a cm síkszimmetria mintázatig.

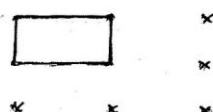


Szabályosan ismétlődő forgásos elemeket találunk mindkét görög vázán. A köröcskék (balra) ill. a spirálisok (jobbra) háromszöges rácsozat pontjaiban helyezkednek el. A bal oldali mintán $p6$ szerkezetű forgórózsza szerűen fogják körbe a háromszögek a köröcskéket. A jobb oldali mintán félfordulattal egymásba forgatható kettős-piskóta alakzatok alkotnak $p2$ -es síkbeli mintázatot alrendszerként. A szemközti oldalon bemutatjuk e mintázat fölépítését a két alcsoportból.

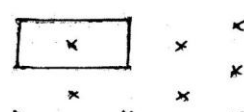
A síkbeli Bravais rácsok típusai:
ferdeszögű



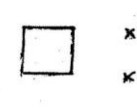
derékszögös



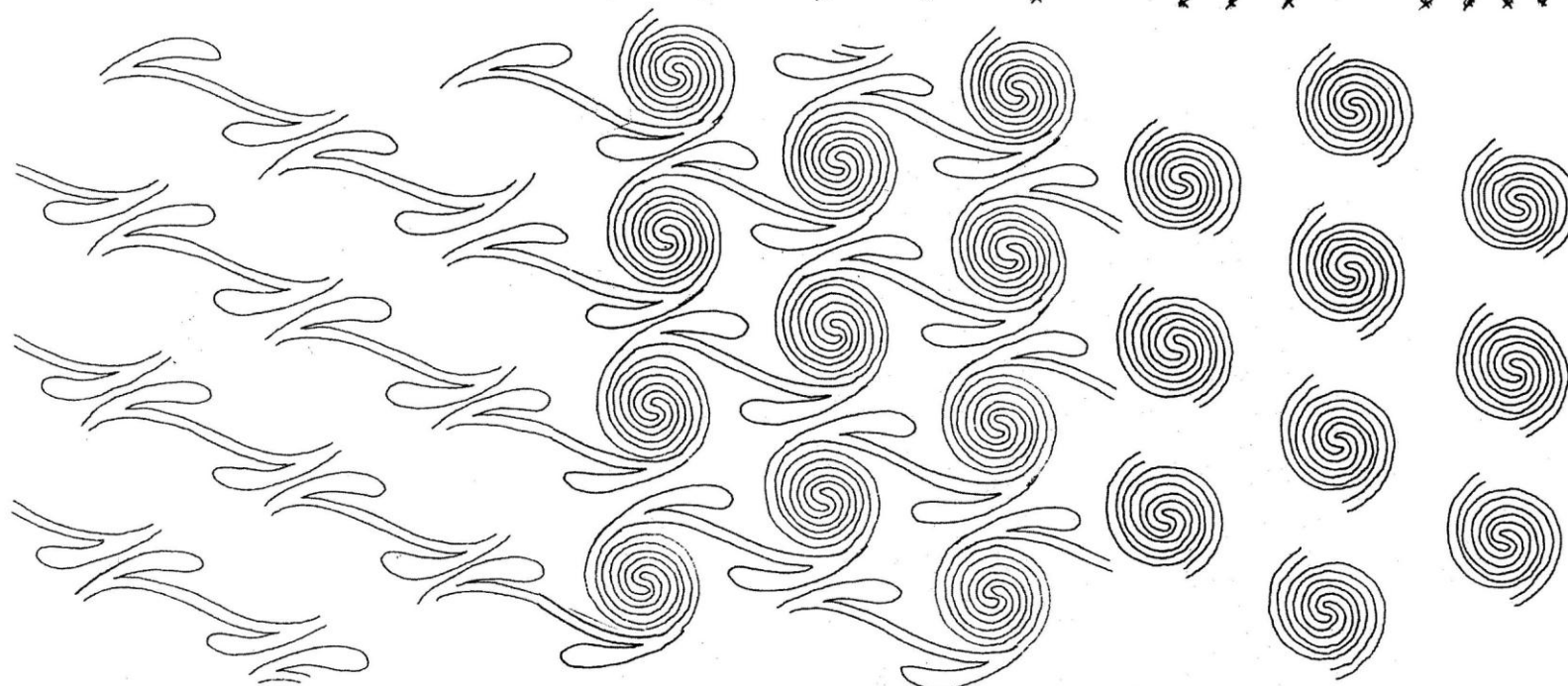
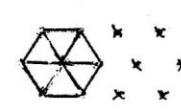
derékszögös-centrált



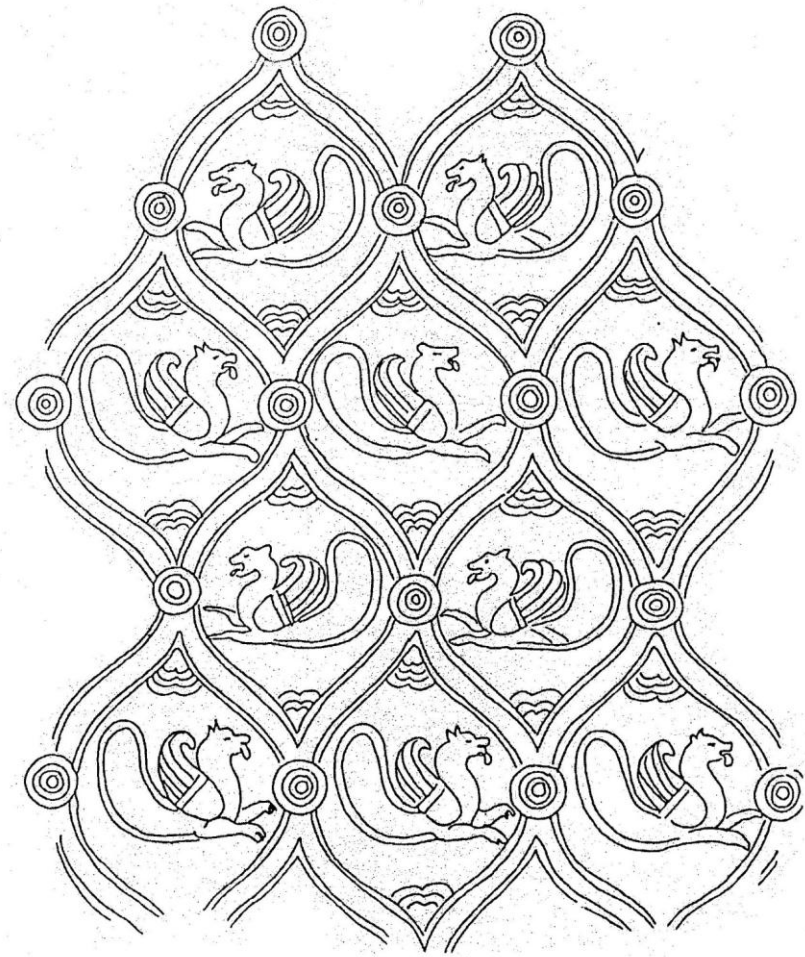
négyzetes

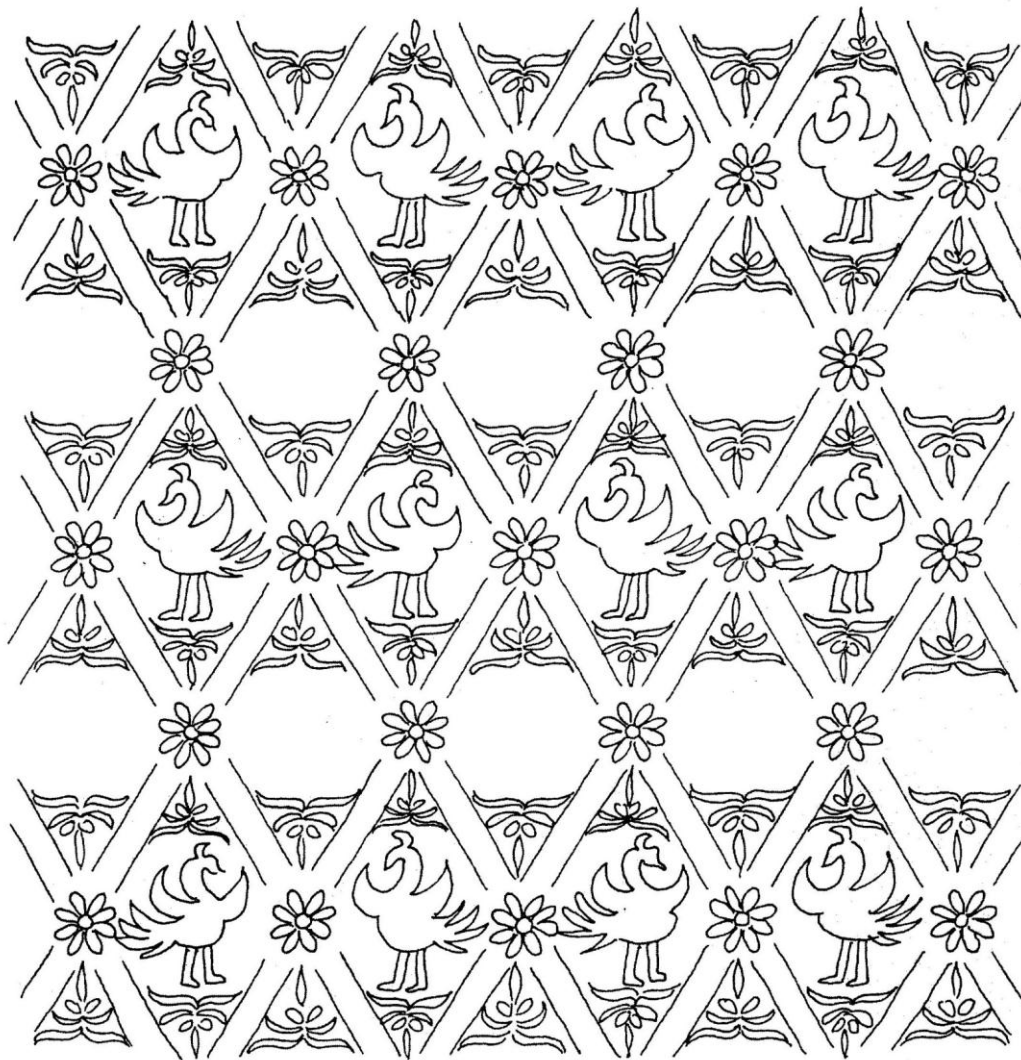


hexagonális



A síkmintázatok pontrácsa (a térbeli megfelelőt Bravais-rácsnak mondjuk) ötféle lehet: **ferdeszögű** (általános paralelogramma elemi cellájú), **derékszögös** (derékszögű paralelogramma csúcsaival meghatározott), **derékszögös-centrált**, (a derékszögű paralelogramma elemi cella középpontjában is van rácspont), **négyzetes**, (négyzet elemi cellájú), **hexagonális** (hatszögös, valójában a szabályos háromszögrács csúcsaiban elhelyezkedő pontok által meghatározott).



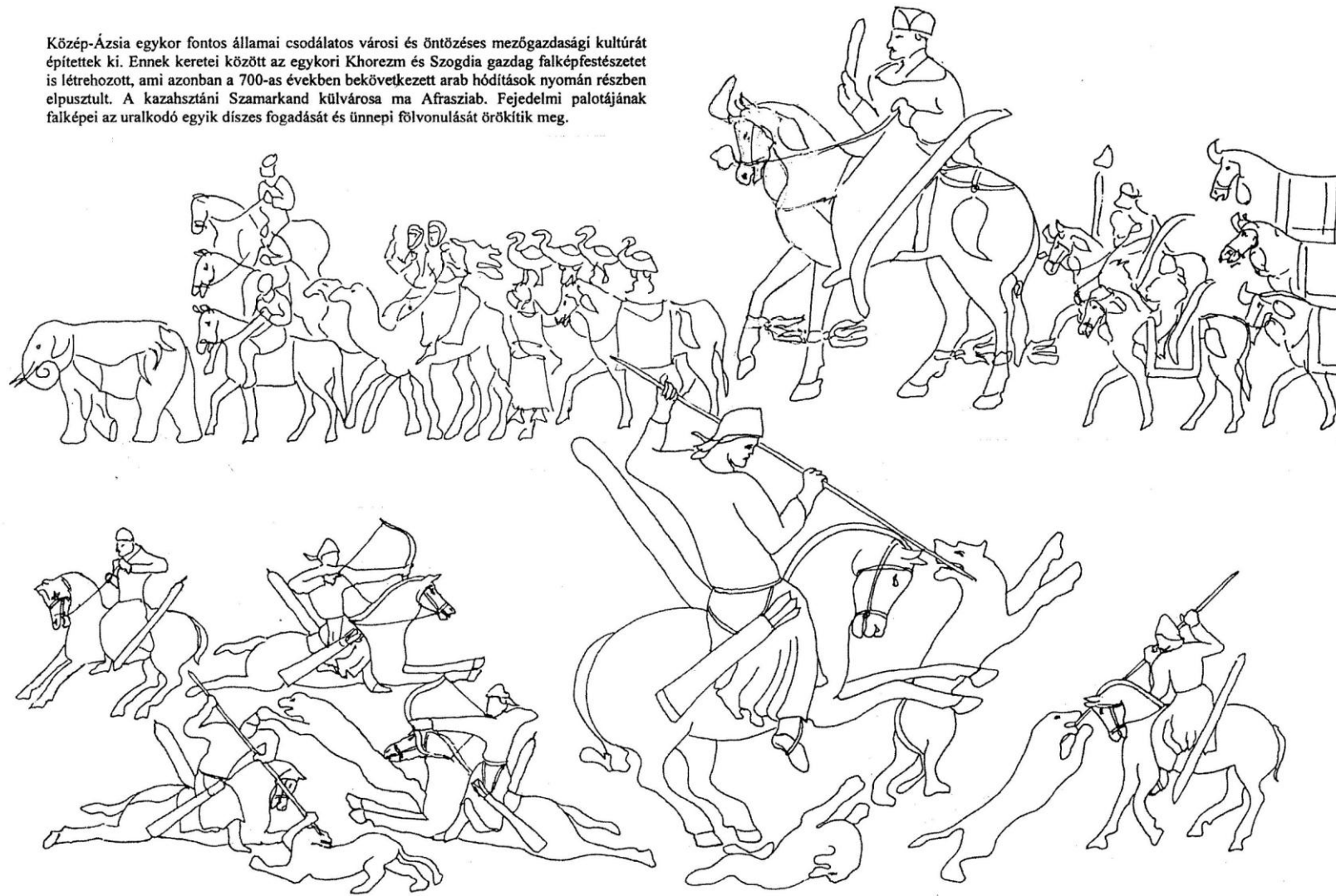


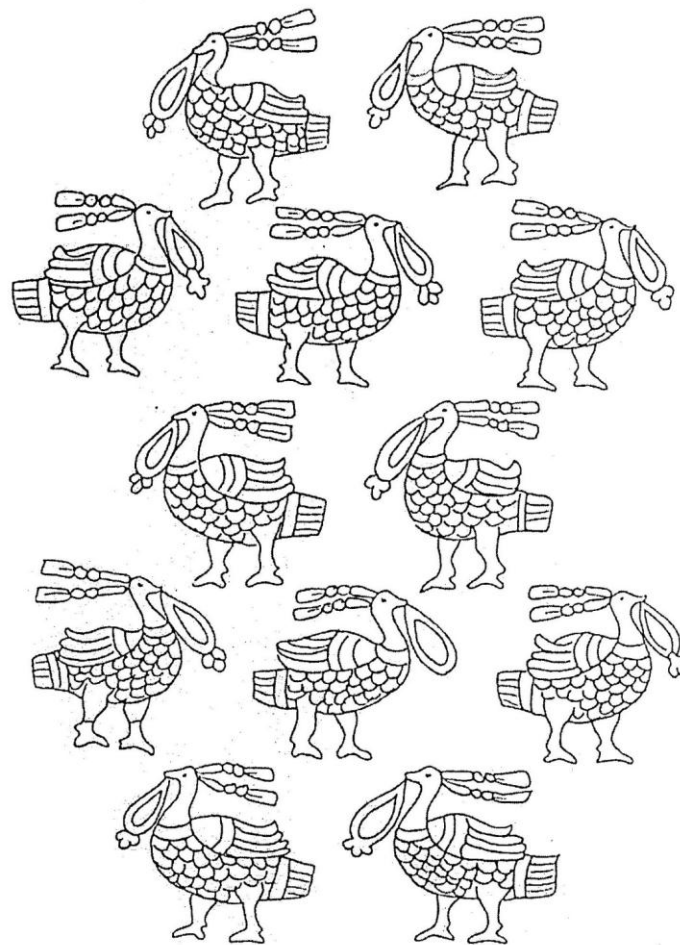
Dunhuang ma Kína Kansu tartományának egyik városa. A város az ókorban a Selyemút fontos állomása volt. Először a Han dinasztia császárai foglalták el harcban a hunoktól, majd a Nagy Fal rendszerét is kiépítették a városig. Dunhuang legnevezetesebb ókori emléke a közelében található Ezer Buddha Barlang. A szerzetesek egykori celláit kifestették és e falfestmények a régmúlt korok krónikásai. Füzetsorozatunkban is szerepelt már vadászjelenet a dunhuangi falképekből.

Az a dunhuangi összetett díszítőmintázat, amelyet itt bemutatunk, három alrendszerre bontható. A faldísz hatszöges pontrácsú almintázata rendelkezik a legtöbb szimmetriaművelettel ($p6m$). Itt a rácspontok egy szabályos háromszögekből álló rács csúcspontjait képezik. A hálózatalakotó rombuszos alrendszer gyakori díszítése a sztyeppe-művészetnek, és cmm szerkezetű. A rombuszokban elhelyezkedő madarak, egymással szembe forduló párokat képezve, egy összetett, és most cm^* -gal jelölt szerkezetű almintázatot alkotnak. Az egész minta rendje tehát: $p6m/cmm/cm^*$.

A tükör bal oldalán az afraziabi falfestmények egyik kereskedőjét látjuk ruházatának fölnagyított mintájával. Ez az összetett díszítőmintázat is három alrendszerre bontható. A hatszöges hálózatú pontrács (ahol a rácspontok egy szabályos háromszögekből álló rács csúcspontjait adják) almintázata ($p6m$). A hullámosan rombuszos alrendszer hálózata cmm szerkezetű. A rombuszokban elhelyezkedő madarak pedig soronként hol jobbra, hol balra néznek, ezért szerkezetük pg . Az egész minta rendje tehát: $p6m/cmm/pg$.

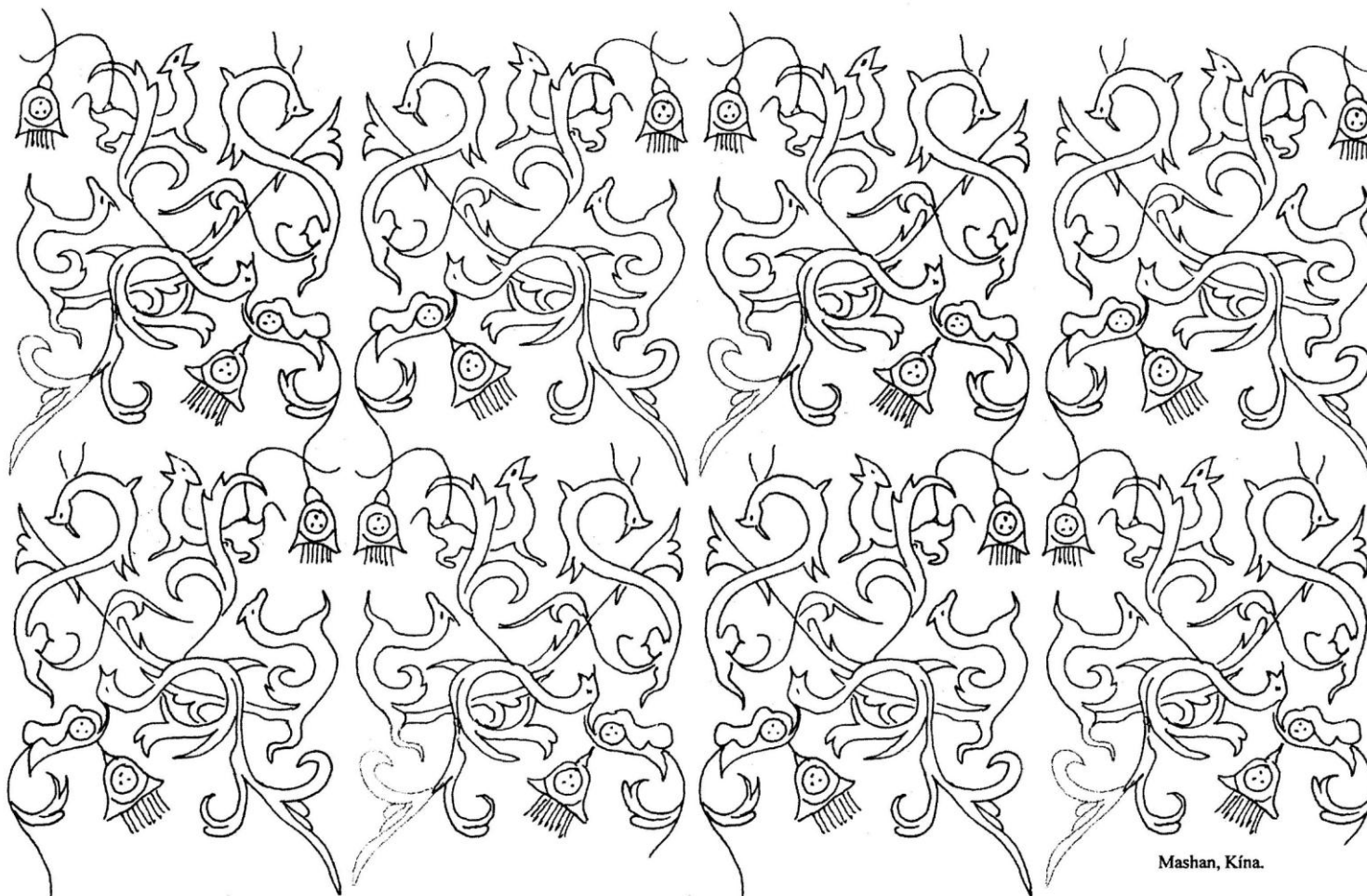
Közép-Ázsia egykor fontos államai csodálatos városi és öntözéses mezőgazdasági kultúrát építettek ki. Ennek keretei között az egykori Khorezm és Szogdia gazdag falképfestészetet is létrehozott, ami azonban a 700-as években bekövetkezett arab hódítások nyomán részben elpusztult. A kazahsztáni Szamarkand külvárosa ma Afrasziab. Fejedelmi palotájának falképei az uralkodó egyik díszes fogadását és ünnepi fölvonulását örökítik meg.





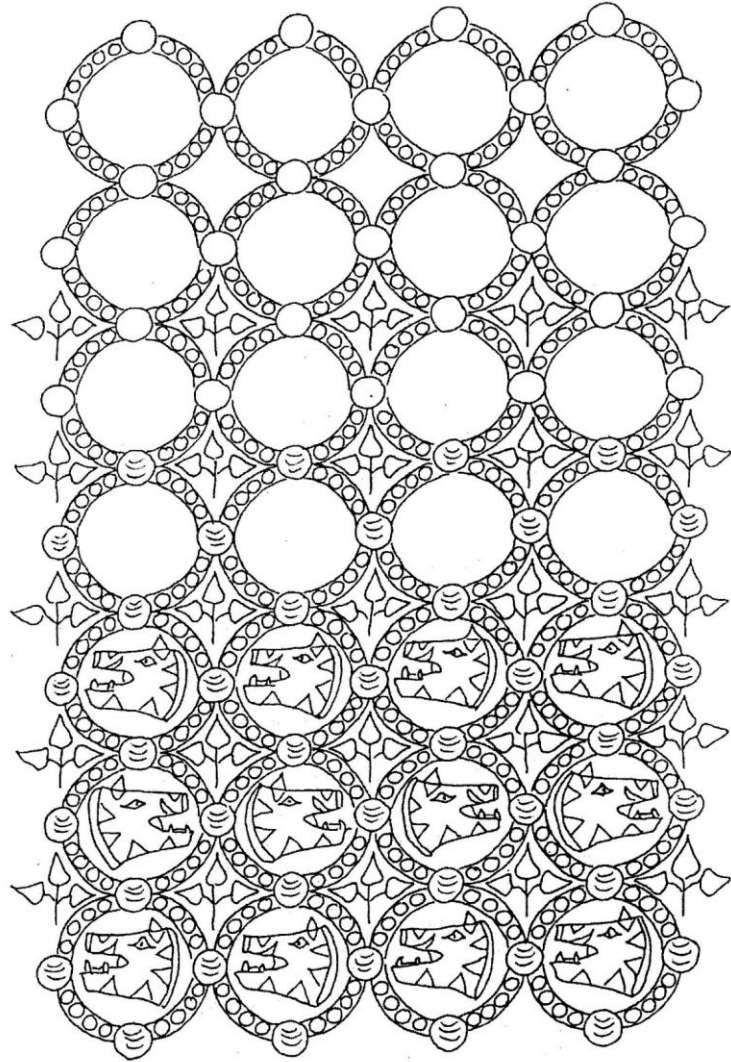
A fejedelmi menetben elefántok és tevék is vonulnak, szép Közép-ázsiai lovat is vezetnek, a vendégek nagy része lovakon és tevéken ül. A fejedelem alakja nagyobb méretű az eredeti falképeken, mint a kíséreté. Ezekből emeljük ki azokat a részleteket, amelyeken az etnomatematika különösen érdekes részletei figyelhetők meg. A szemközti oldalon bemutatunk egy vadászjelenetet is. A jobb oldali képen a fejedelem alakját emeljük ki, akinek a ruházati mintáját külön is megrajzoltuk.





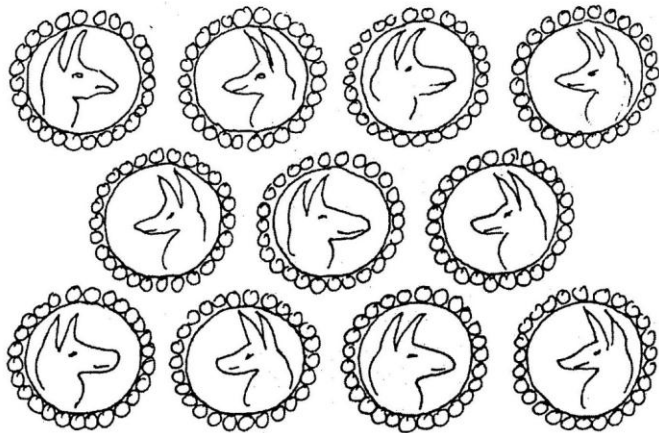
Mashan, Kína.

Az afraziabi falképeken az oldaltükör bal felén látható három kereskedő alakja az etnomatematikai mintakincs három főszereplője. Mindhármuk ruházatán összetett, némelyikükén többszörösen összetett, síkbeli mintaszerkezetet találunk. A következő oldalakon a bal szélső kereskedő vaddisznódíszes ruházatát többféle módon is „szétszedjük”, és összerakjuk. Mivel a Kr. u. 6-7. században kiterjedt kereskedelem folyt a Selyemúton, amelyen kínai selymeket is szállítottak, (talán éppen őket ábrázolja a kép) bemutatunk gazdagon díszített kínai mintázatot is. Ezeket négyzetes hálózati-alapszerkezet foglalja keretbe az állatalakkal, virágokkal díszített mintagyűjtést.

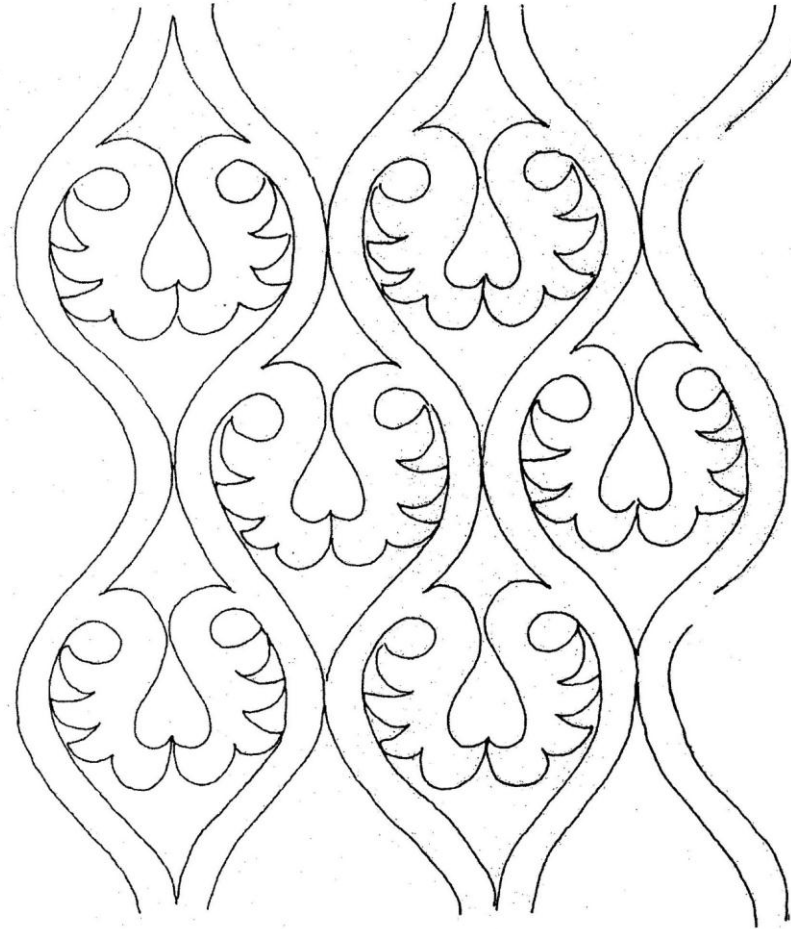


Afrasiab

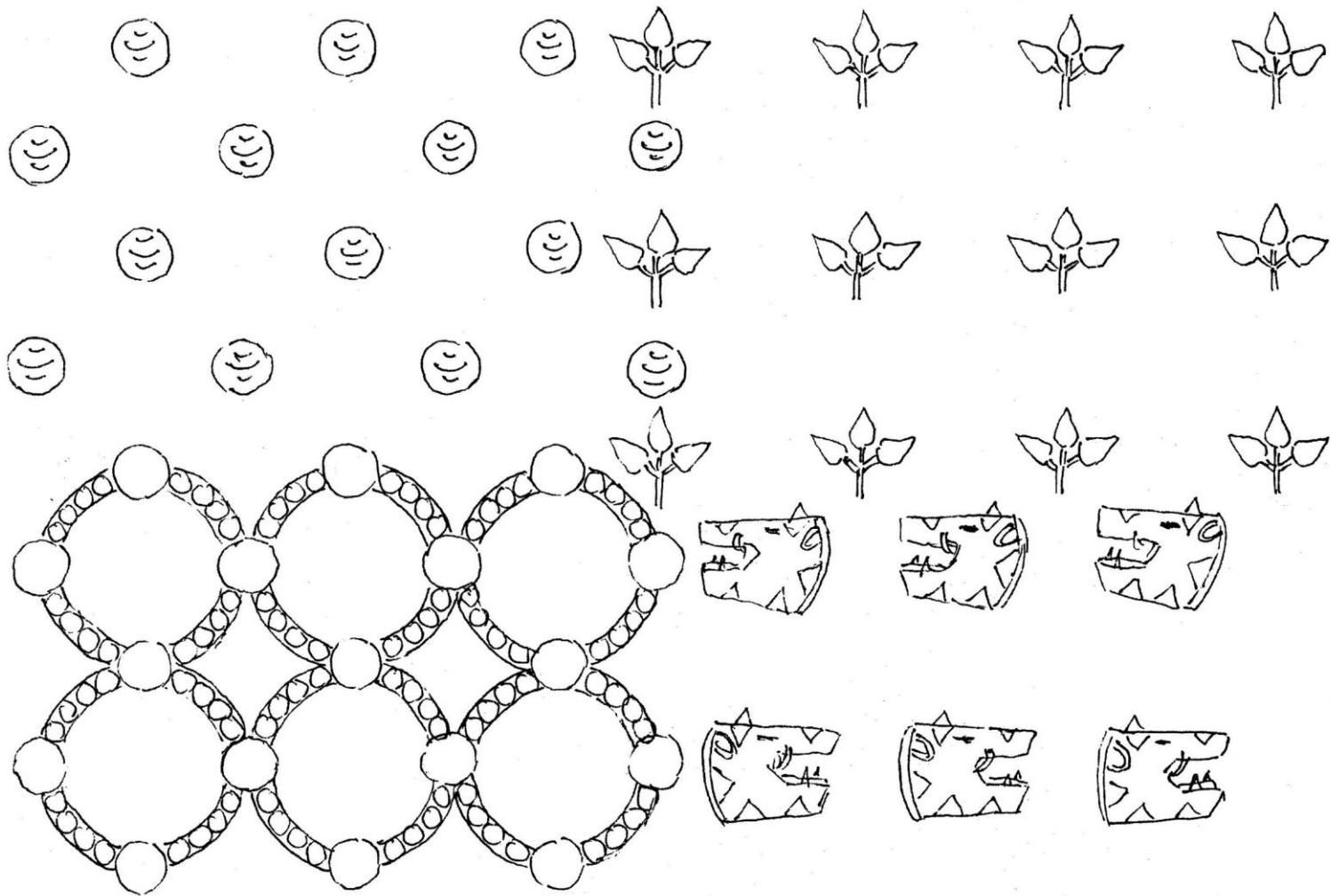
Hálószerkezetben elhelyezett állatalakos síkbeli mintázatok gyakori összetett díszítőszervezetek Közép-Ázsiában és Közép-Európában. Az afraziabi kereskedő ruháján vaddisznófejek, a Balalyk Tapén található falképen kutyafejek szerepelnek a gyöngykeretes körmintákban, a pécsi régi székesegyház kőfaragásán palmettákból kirajzolódó oroszlánfejek láthatók a rombuszos hullámzó hálózatban. Az afraziabi minta szerkezete $p4m/pm/cm/pg$, a Balalyk tepei $p6m/pg^*$, a pécsié cmu/cm szerkezetű. (Afrasiab és Balalyk Tepe egykori városok romjai a mai Üzbegisztánban találhatóak.)

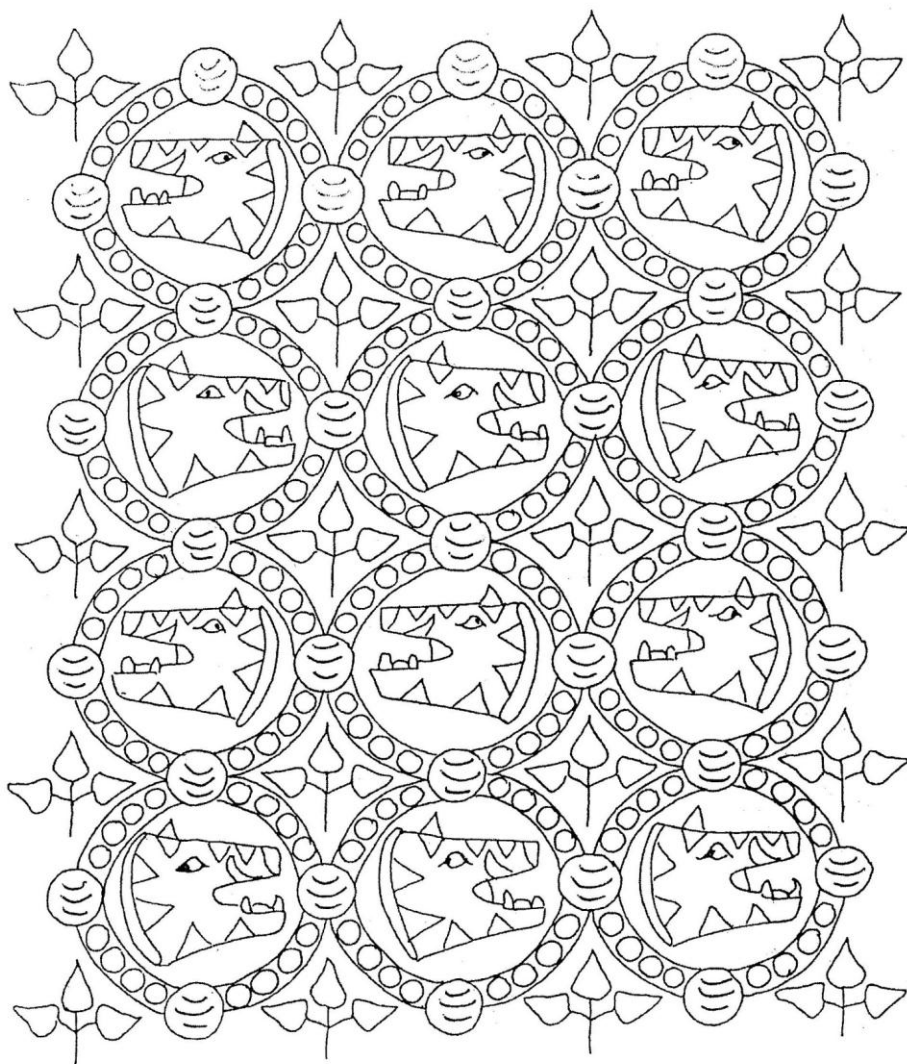


Balalyk Tepe



Pécs

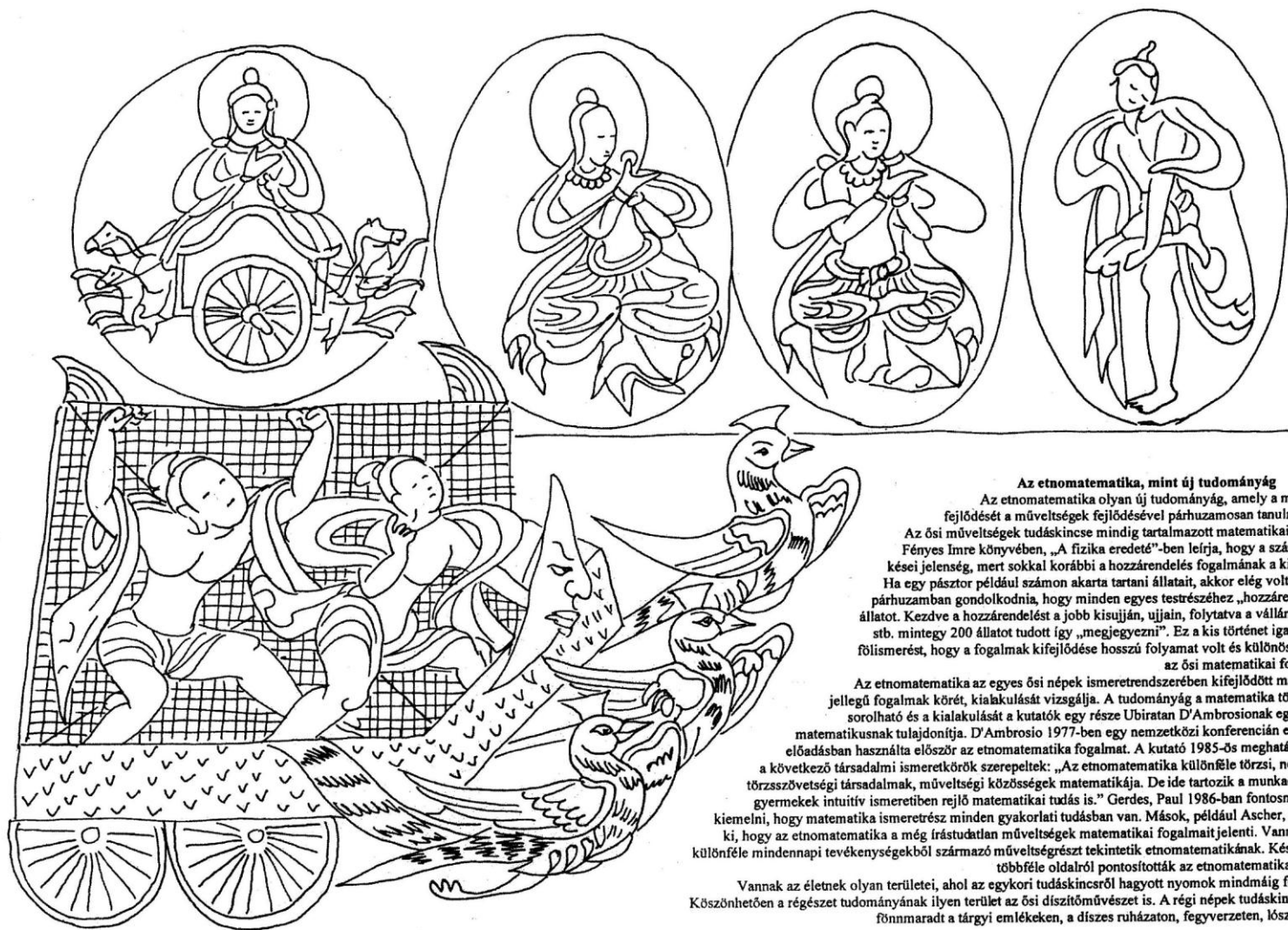




Az eurázsiai díszítőművészetben az egyszerű síkbeli mintázatoknál összetettebb szerkezetek is előfordulnak. Ezeket a már megismert síkbeli szimmetria-mintázatokból vezethetjük le. Kétféle esetet vizsgálunk. Az egyikben két független mintázat összetételét figyelhetjük meg. Az ilyen típusokat a Curie-elvet (Curie, 1894) megfogalmazó francia fizikusról Curie-típusúnak neveztük el (Bérczi, 2004). A másikban a kétféle mintázat szorosan kapcsolódik egymáshoz, az egyik a másikkól levezethető, mert pl. a színezés során változik meg a mintázat szerkezete. Az egyik mintázat az, amit a színezés előtti állapotnak tekintünk, a másik a színezéssel létrehozott alakzatrendszer. A színezés átalakítja a korábbi szerkezet szimmetriáit. Ezeket a szerkezeteket a témát részletesen tárgyaló kanadai matematikusról Coxeter-típusúnak (Coxeter, 1986) neveztük el (Bérczi, 2007).

A síkbeli összetett mintázatokon a következőt értjük. Olyan, az egész síkra kiterjedő díszítőmintázat (alakzatrendszer) ez, amely szétválasztható legalább két, szintén az egész síkra kiterjedő alakzatrendszerre. Ha szétválasztható, akkor persze ezekből össze is illeszthető. Ezek az összetett mintázatokon tehát egyszerre van jelen legalább kétféle alakzatsóport. Ezek olyan alrendszerei (almintázatai) az egész mintázatnak, amelyek megkülönböztethetők akár a színükkel, akár a belső összekapcsolódásuk módjával, vagy a figurák alapján. Leggyakoribb például az az eset, amikor az egyik almintázat hálózatot képez, míg a másik almintázat a hálóban elhelyezkedő figurákból áll. Ilyeneket találunk az afraziabi palota falfestményein.

A túlsó oldalon összetevőire bontott vaddisznófejes mintázatban négy különböző szerkezetet fedezhetünk föl. A gyöngysorral körülvelt kör alakú keretek rendelkeznek a legtöbb szimmetriaművelettel ($p4m$). A háromfelé elágazó leveles ágak a gyöngysoros körök sarkain helyezkednek el: ezek rendje a pm szerkezetre jellemző. A gyöngysort megszakító nagyobb körökben három sor félköríves alakzat látszik. Ezek egy cm szerkezetű almintázatot alkotnak. Utoljára említjük a vaddisznófejek mintázatát, amely pg szerkezetű. Az egész minta rendje: $p4m/pm/cm/pg$.



Az etnomatematika, mint új tudományág

Az etnomatematika olyan új tudományág, amely a matematika fejlődését a műveltségek fejlődésével párhuzamosan tanulmányozza.

Az ősi műveltségek tudáskincse mindig tartalmazott matematikai elemeket. Fényes Imre könyvében, „A fizika eredet”-ben leírja, hogy a számolás már kései jelenség, mert sokkal korábbi a hozzárendelés fogalmának a kialakulása.

Ha egy pásztor például számon akarta tartani állatait, akkor elég volt egy olyan párhuzamban gondolkodnia, hogy minden egyes testrészehez „hozzárendelt” egy állatot. Kezdvé a hozzárendelést a jobb kisujján, ujjain, folytatva a vállán, hónalján stb. mintegy 200 állatot tudott így „megjegyezni”. Ez a kis történet igazolja azt a fölismerést, hogy a fogalmak kifejlődése hosszú folyamat volt és különösen igaz ez az ősi matematikai fogalmakra.

Az etnomatematika az egyes ősi népek ismeretrendszerében kifejlődött matematikai jellegű fogalmak körét, kialakulását vizsgálja. A tudományág a matematika történetéhez sorolható és a kialakulását a kutatók egy része Ubiratan D'Ambrosionak egy braziliai matematikusnak tulajdonítja. D'Ambrosio 1977-ben egy nemzetközi konferencián elhangzott-előadásban használta először az etnomatematika fogalmát. A kutató 1985-ös meghatározásában a következő társadalmi ismeretkörök szerepeltek: „Az etnomatematika különféle törzsi, nemzeti, törzsszövetségi társadalmak, műveltségi közösségek matematikája. De ide tartozik a munkacsoportok, gyermekek intuitív ismeretiben rejlő matematikai tudás is.” Gerdes, Paul 1986-ban fontosnak tartotta kiemelni, hogy matematika ismeretrez minden gyakorlati tudásban van. Mások, például Ascher, azt emelte ki, hogy az etnomatematika a még írástudatlan műveltségek matematikai fogalmait jelenti. Vannak, akik a különféle mindennapi tevékenységekből származó műveltségrészt tekintik etnomatematikának. Később egyre többféle oldalról pontosították az etnomatematika fogalmát.

Vannak az életnek olyan területei, ahol az egykori tudáskincsről hagyott nyomok mindmég föllelhetők. Köszönhetően a régészet tudományának ilyen terület az ősi díszítőművészet is. A régi népek tudáskincseiből sok fönnmaradt a tárgyi emlékeken, a díszes ruházaton, fegyverzenen, lószerszámon.

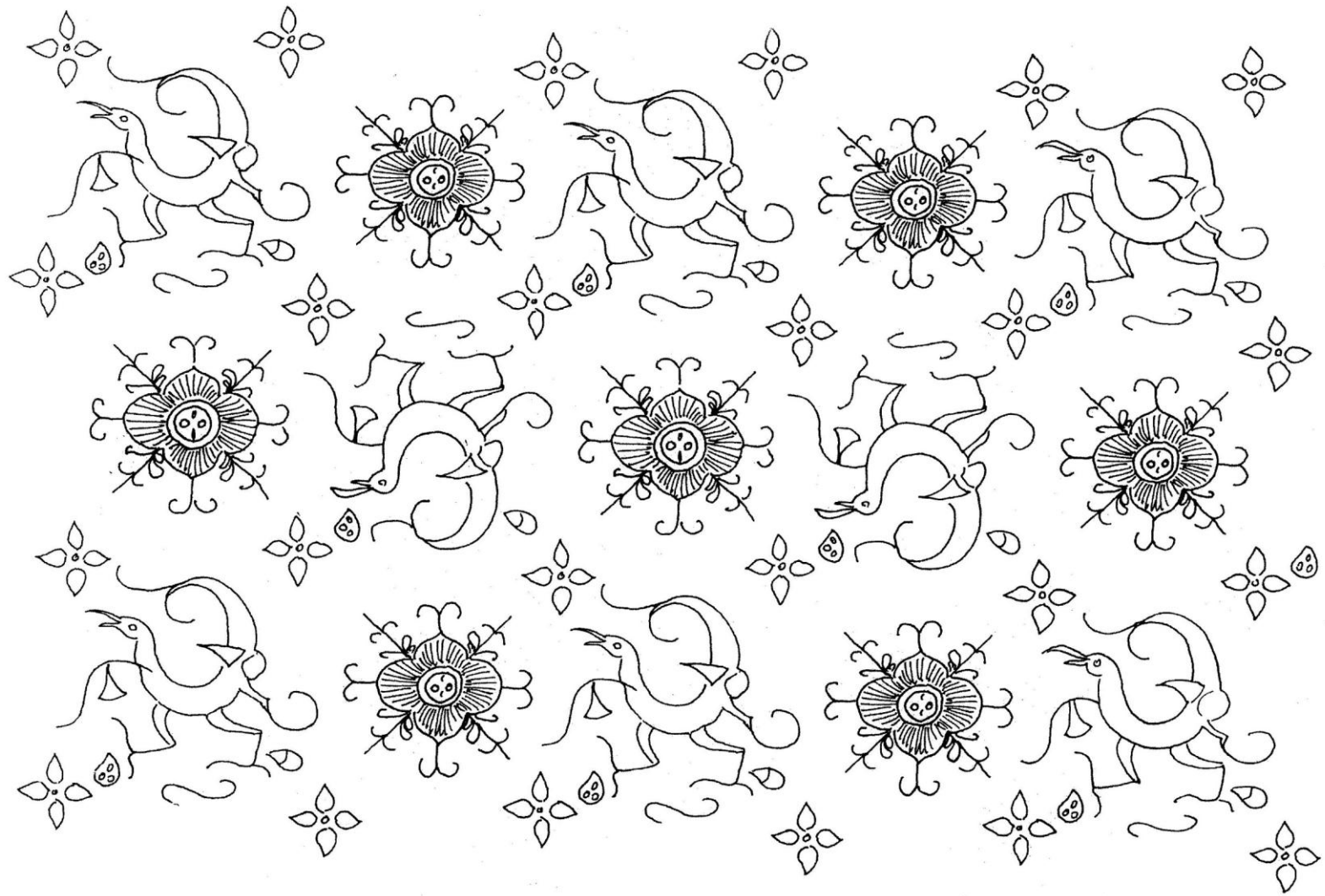


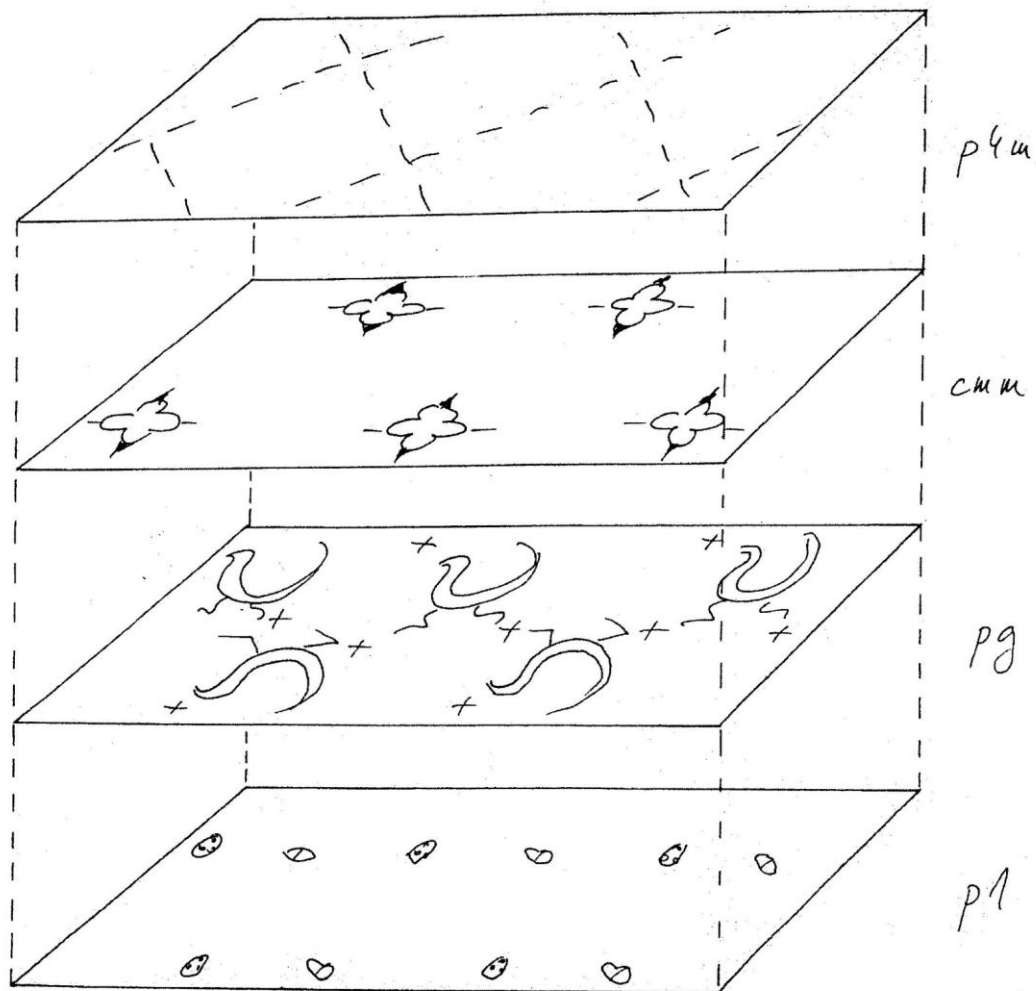
Az eszközeikkel és szerszámaikkal együtt eltemetett halottak sírjából az egyik etnomatematikai szempontból is értékes leletrész a díszítés matematikája, amely a díszítőművészeti mintázatokból olvasható ki. Bár mai tudáskincsünk alapján fogalmazunk meg összehasonlítási alapokat (például az egyenes menti szalag-, vagy fríz-mintáknak, ill. a síkon létrehozható mintázatoknak a szimmetriacsoportjait), a megvalósítás ősi időkben történt. Ennek fölismérése a régészet az etnomatematika egyik legérdekesebb területévé teszi. Az etnomatematikának az egyik látványos területe a díszítőmintázatok matematikája. A díszítőművészet és a vele szoros technológiai tudáson kívül számos más területe van az etnomatematikának. Ilyenek az ősidők óta végzett játékok is. A játékok logikus cselekedetekre sarkallják a résztvevőket és a játék menete során matematikai fogalmak is megjelennek.

Az ősi játékok elemzése tehát szintén érdekes részterülete az etnomatematikának. Vannak terepasztalokon folytatott játékok, melyeken a lépések változatossága teszi lehetővé a partner legyőzését. Másféle játékok azok, ahol a szereplő játékelemeket kell valamilyen forma szerint elrendezni. A dobókockával végzett szerencsés dobáson alapuló játékok szintén ősiiek. Az útvesztők (labirintusok), a bejárható vonalak követésével versenyeztetik a játékosokat. Igen érdekes a ma ismert összetett játékok kialakulásának útja is (például a sakké, vagy a go-é). A játékok ma is kimeríthetetlen forrásai az etnomatematikának.

Az etnomatematika segítségével történő matematika oktatás a műveltség természetes részeként ismerteti meg a fogalmakat a tanulókkal. Hangsúlyt kap az etnomatematikai megközelítésben az is, hogy a fogalmak kifejlődése az élettevékenységek során történik. A tanítás során bizonyos tevékenységek sorrendje és gyakorlása úgy válogatható össze, hogy a matematikai fogalmak ezekkel a tevékenységekkel párhuzamosan fejlődjenek ki. Túl ezen, az etnomatematikai megismerő-cselekvés (például a rajzolás és a festés) segítségével történő matematika-oktatás, lehetőséget biztosít arra is, hogy más népek tapasztalataival ötvözve ismerkedjenek meg a diákok a matematikai fogalmakkal. Együttal e népeket is jobban megismerik a hallgatók. A mai élet sokszínű kulturális programjához tehát jól kapcsolható az etnomatematika oktatása.



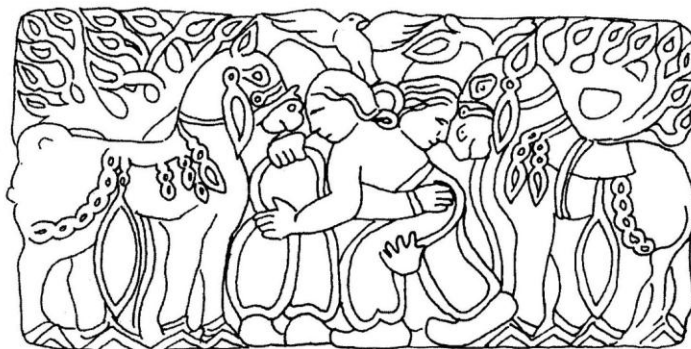
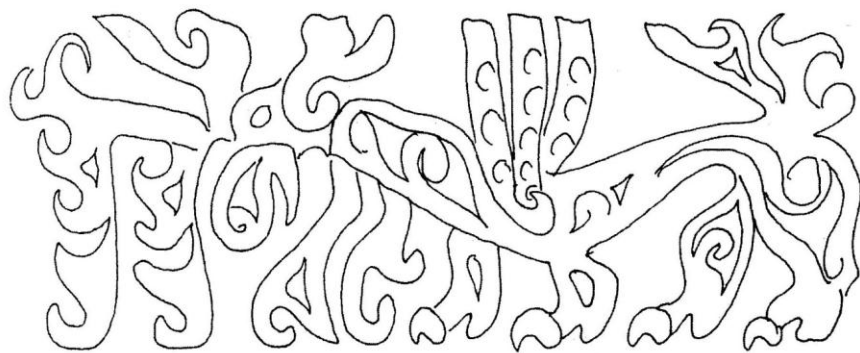




Az összetett szerkezetű kínai mintát a következő „emeletekre” bonthatjuk szét. Legfelső szintre helyeztük a minta rácsozatát, amit csak néhány vékony szál jelez, de uralkodik a mintázaton a négyzetes hálózat rendje. A fölülről második szintre került a napsugár arcú virágok csoportja cmm rendezettséggel. A fölülről harmadik szintre kerültek a főszereplő futó madáralakok, melyeknek rendje pg . A maradék összetevőket, a „pöttyeket”, amelyek egyes szemcsék formájában található szétszórva, egy alacsony szimmetriájú $p1$ mintázatba csoportosíthatjuk.

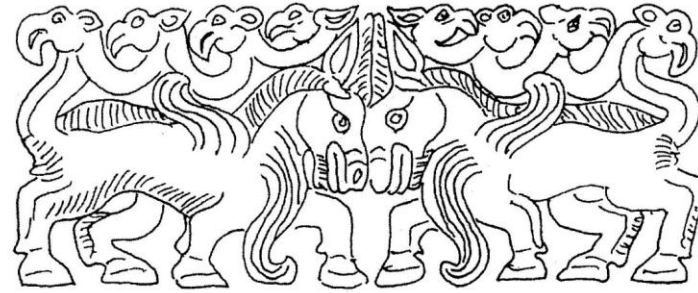
Tehát a kínai összetett mintán is négy különböző szerkezetet fedezhetünk föl. A hálózatot alkotó rácszat rendelkezik a legtöbb szimmetria-művelettel ($p4m$).

A napsugaras arcok cmm szerkezetűek, a futó madáralakok pg szerkezetet adnak, míg a pöttyek csak egy $p1$ rendezettségű mintázatba illenek. Az egész összetett kínai mintázatnak a szerkezeti rendszere tehát a következő: $p4m/cmm/pg/p1$.



Pazirik, a kurgán falát borító fali szőnyeg küzdelmi jelenete. Állatküzdelmi és birkózási jelenetek egy hun-kínai hímzésen (bal oldali felső jelenet),

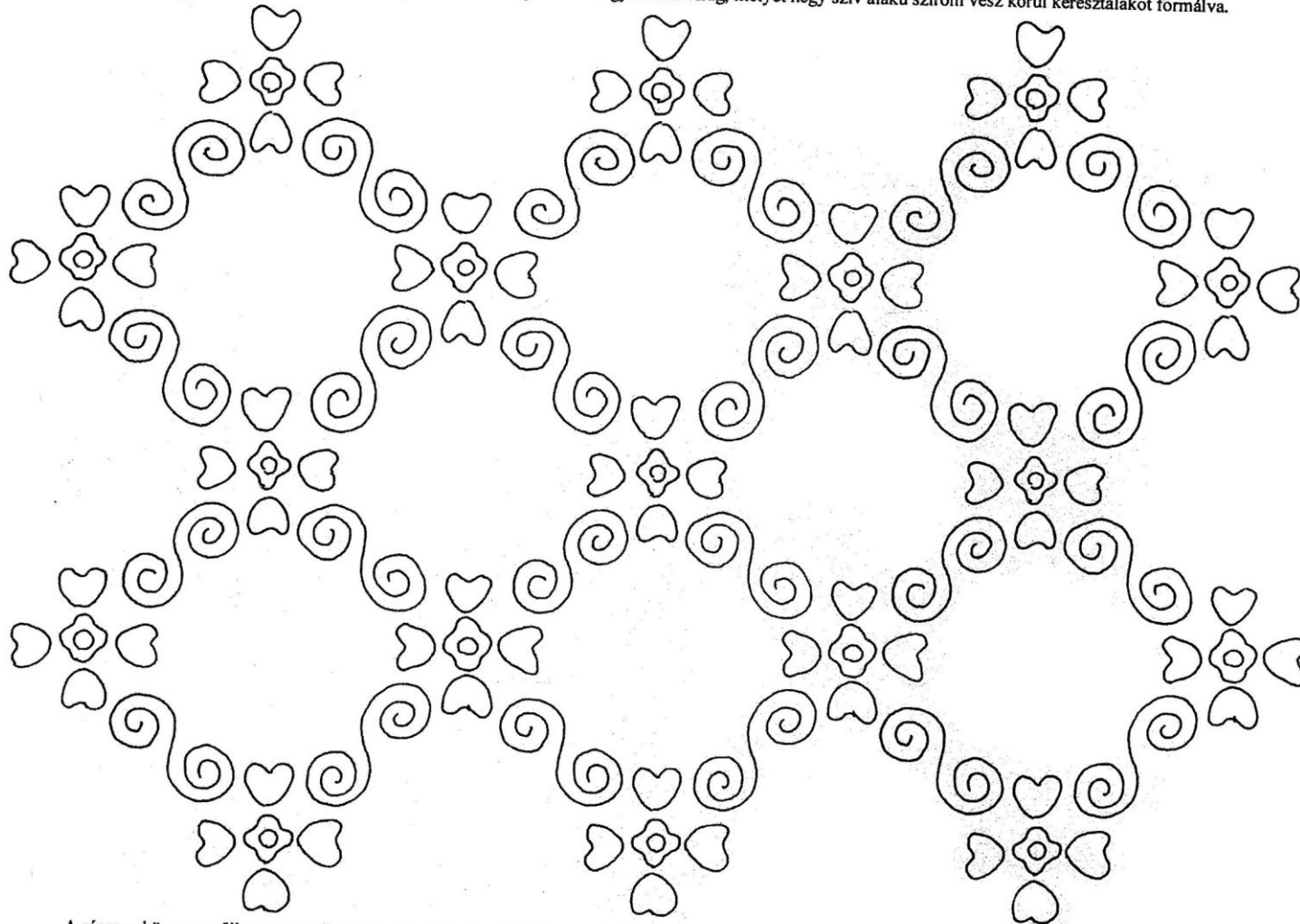




és hun szíjvégeken Észak-Kínából, Ordoszból, Mongóliából és Szibériából. A küzdelem ábrázolása a sztyepei művészet legmozgalmasabb része.



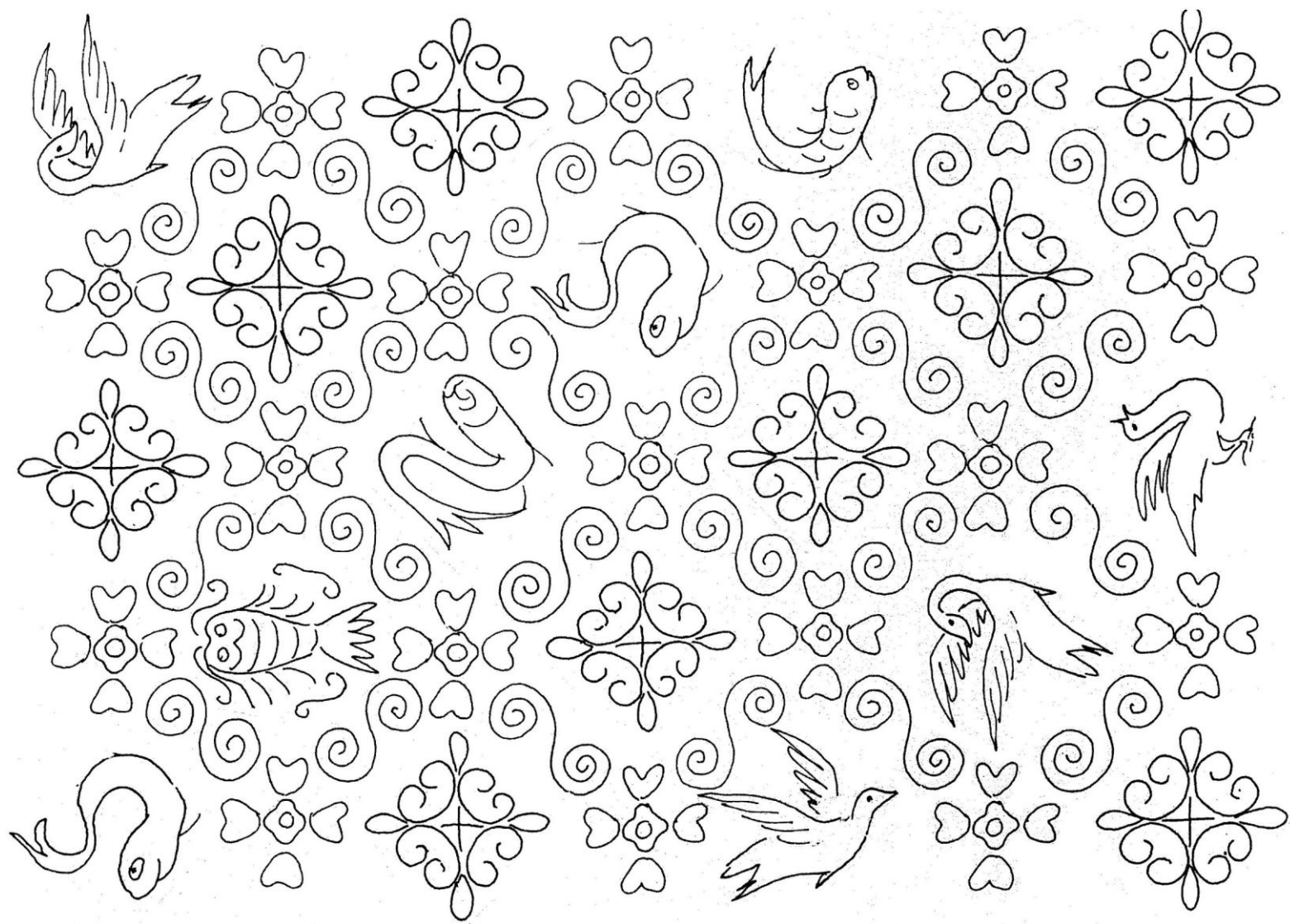
A Noın Ujában fõitart hun királysírok legnagyobb, etnomatematikát őrzõ ásatási lelete három szõnyeg.

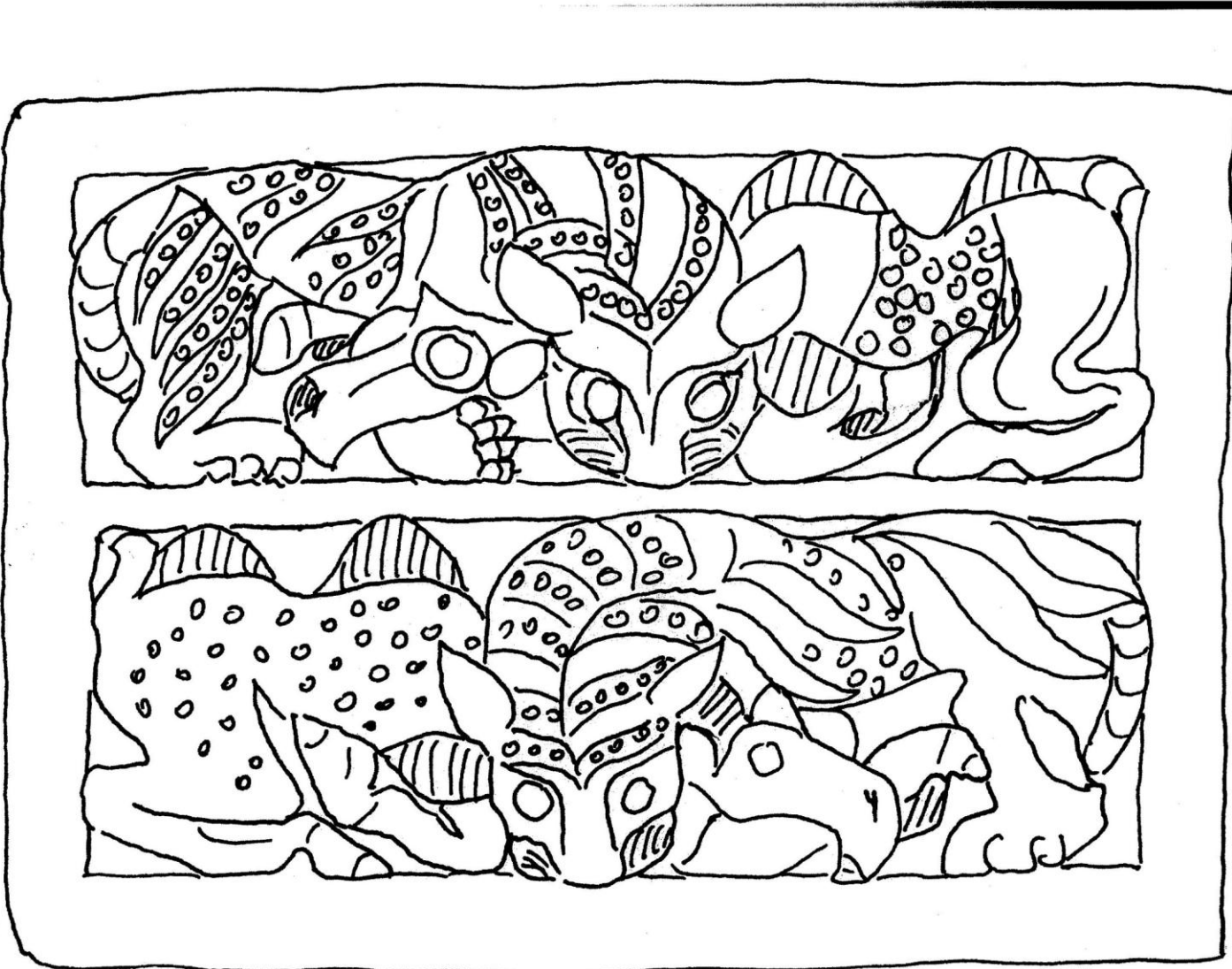


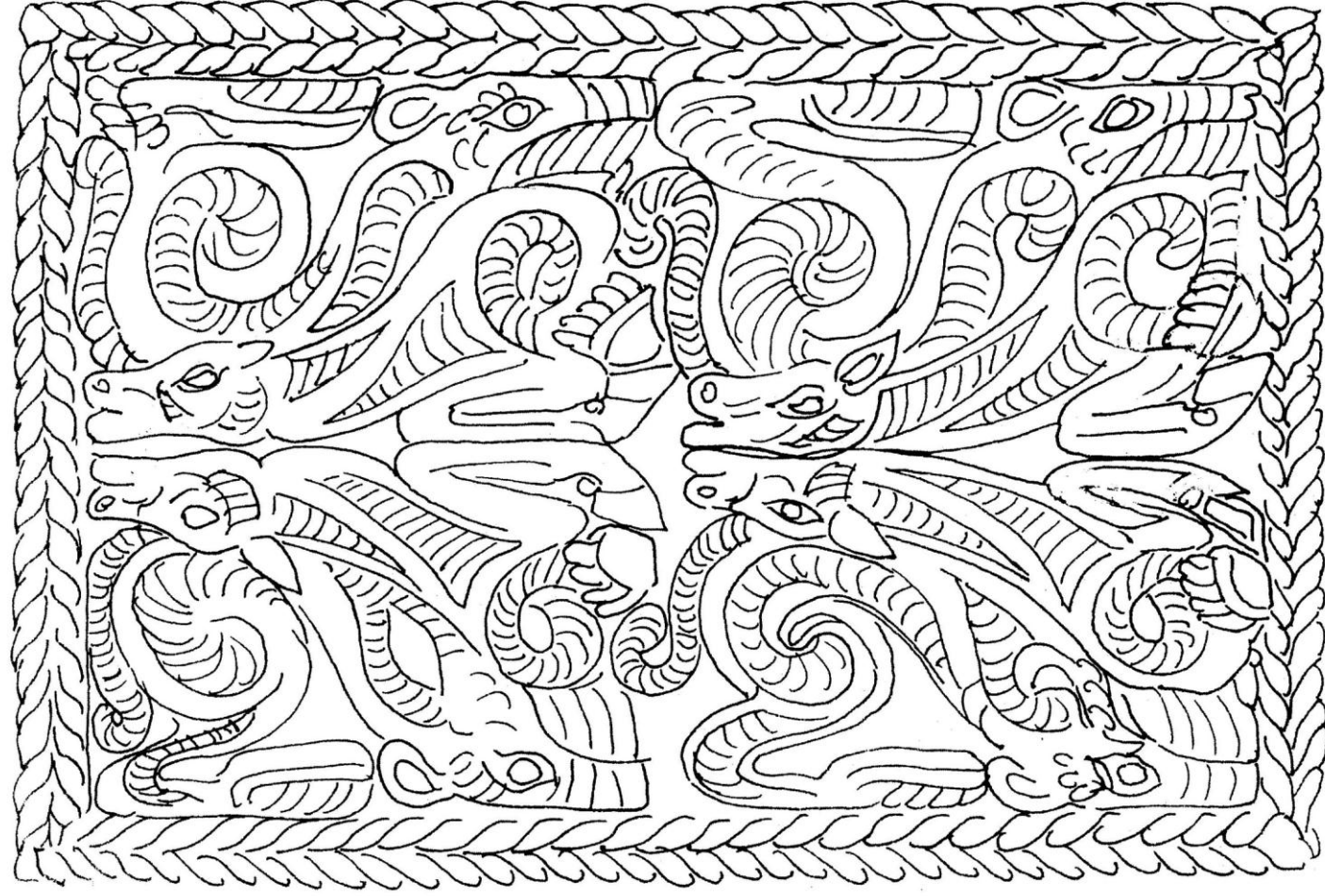
A leggazdagabb komponens a négyzetrács pontokban elhelyezkedõ négyszirmú virág, melyet négy szív alakú szírom vesz körül keresztalakot formálva.

A rácsrend üres mezõiben, az egyik sávban madárkafigurák, ill. egy másik sávban a keresztminták egy egyszerűbb $p1$ jellegű alrendszert képviselnek.

A virágképletek $p4m$ szerkezetű, a töltek induló, S alakú, hullámzó indák cm szerkezetű alrendszert adnak.

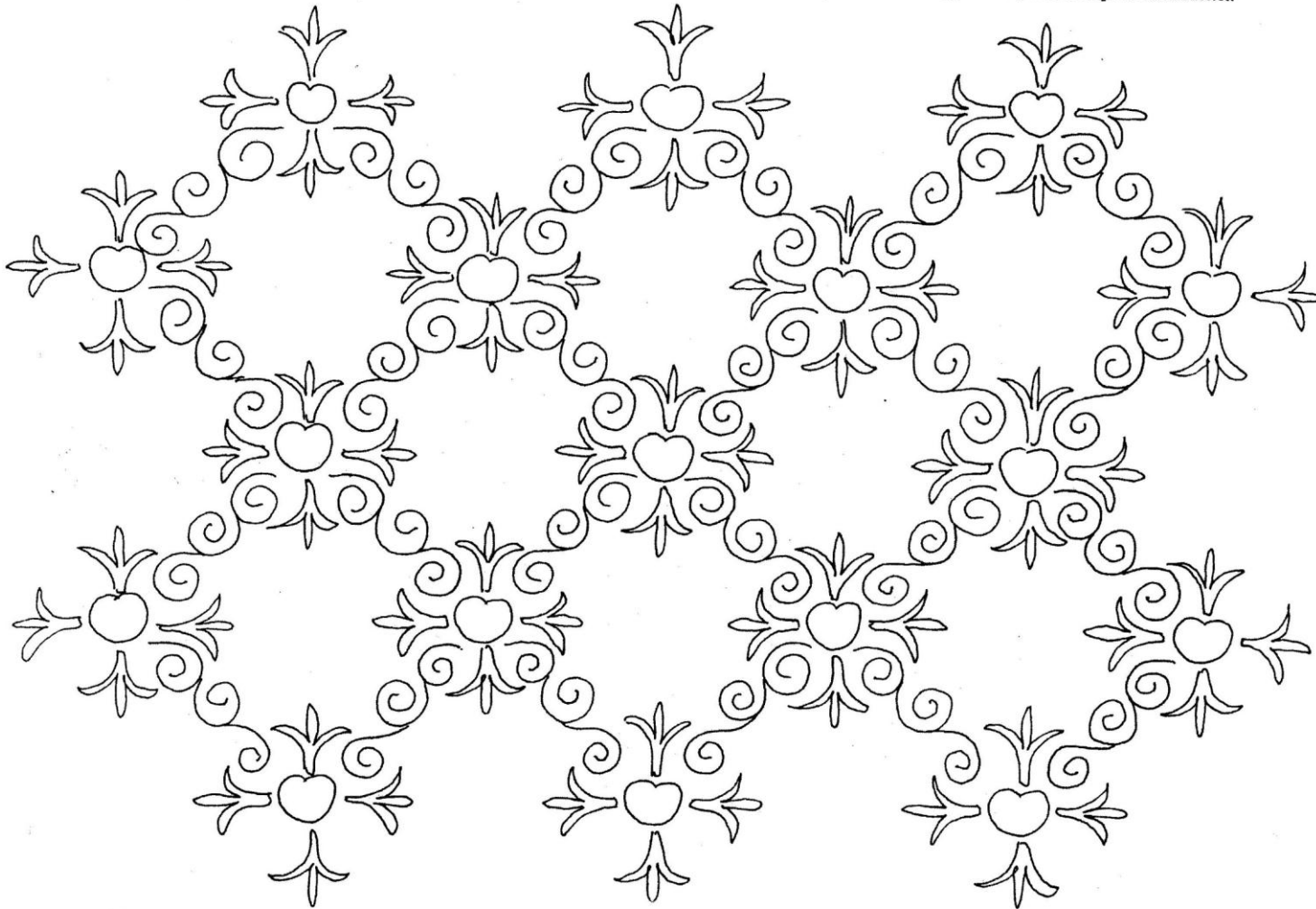






Két ordoszi hun (xiongnu) övveret állatküzdelemmel. A túlsó oldali övveret leelőhelye. Xigoupan, Ordosz, Kína.

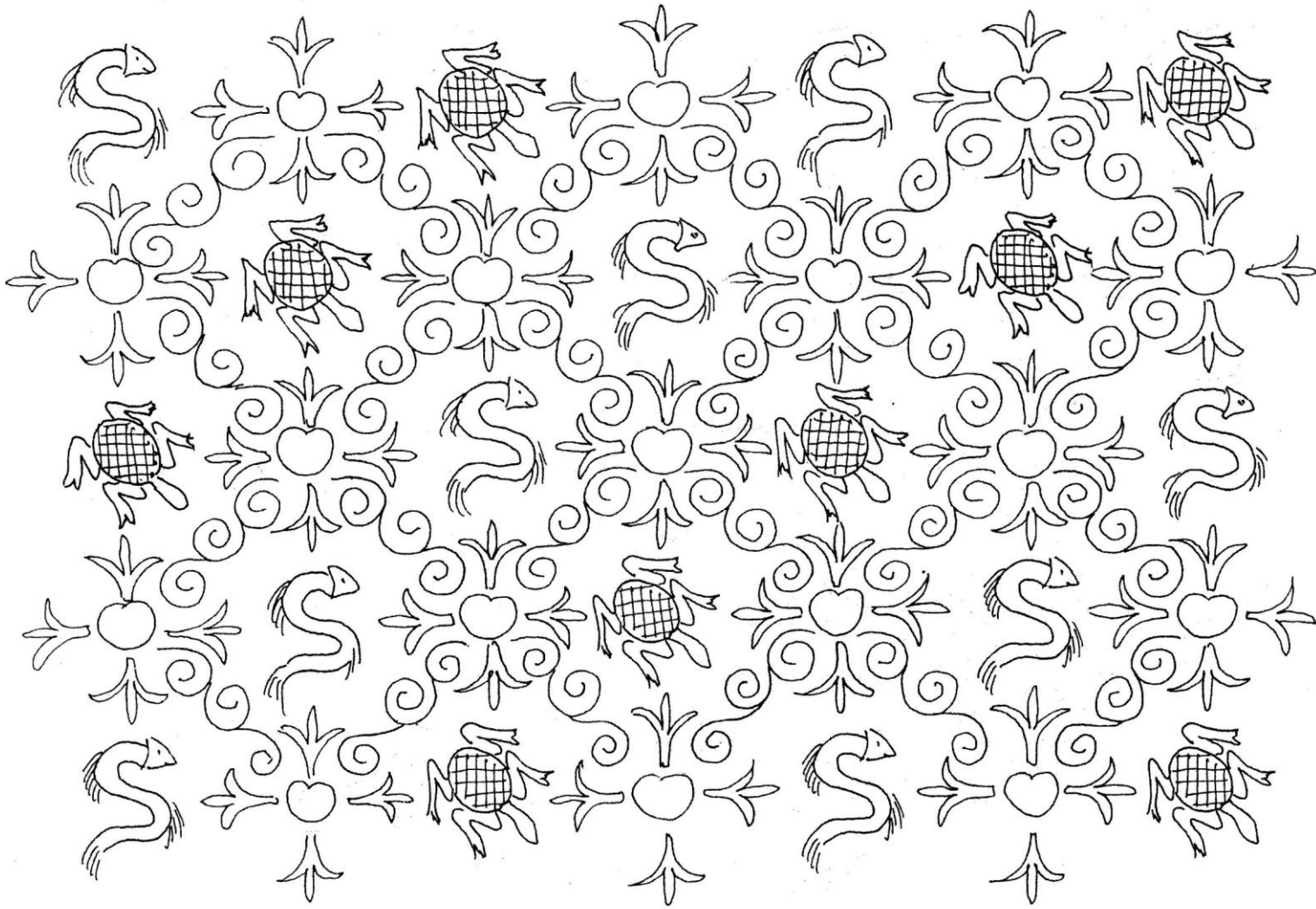
A Noirn Ulában föltárt másik hun kori szőnyeg összetett síkmintázata kínaiakra jellemző minát is tartalmaz.



A rácsrend üres mezőiben haladó, az egyik sávban kicsi kígyófigurák, a másik sávban teknősbékák egy egyszerűbb $p1$ jellegű alrendszert képviselnek.

A leggazdagabb szimmetriájú alrendszer a liliom jellegű virágképletek keresztalakot formáló alrendszere a négyzetrács pontokban $p4m$ szerkezettel.

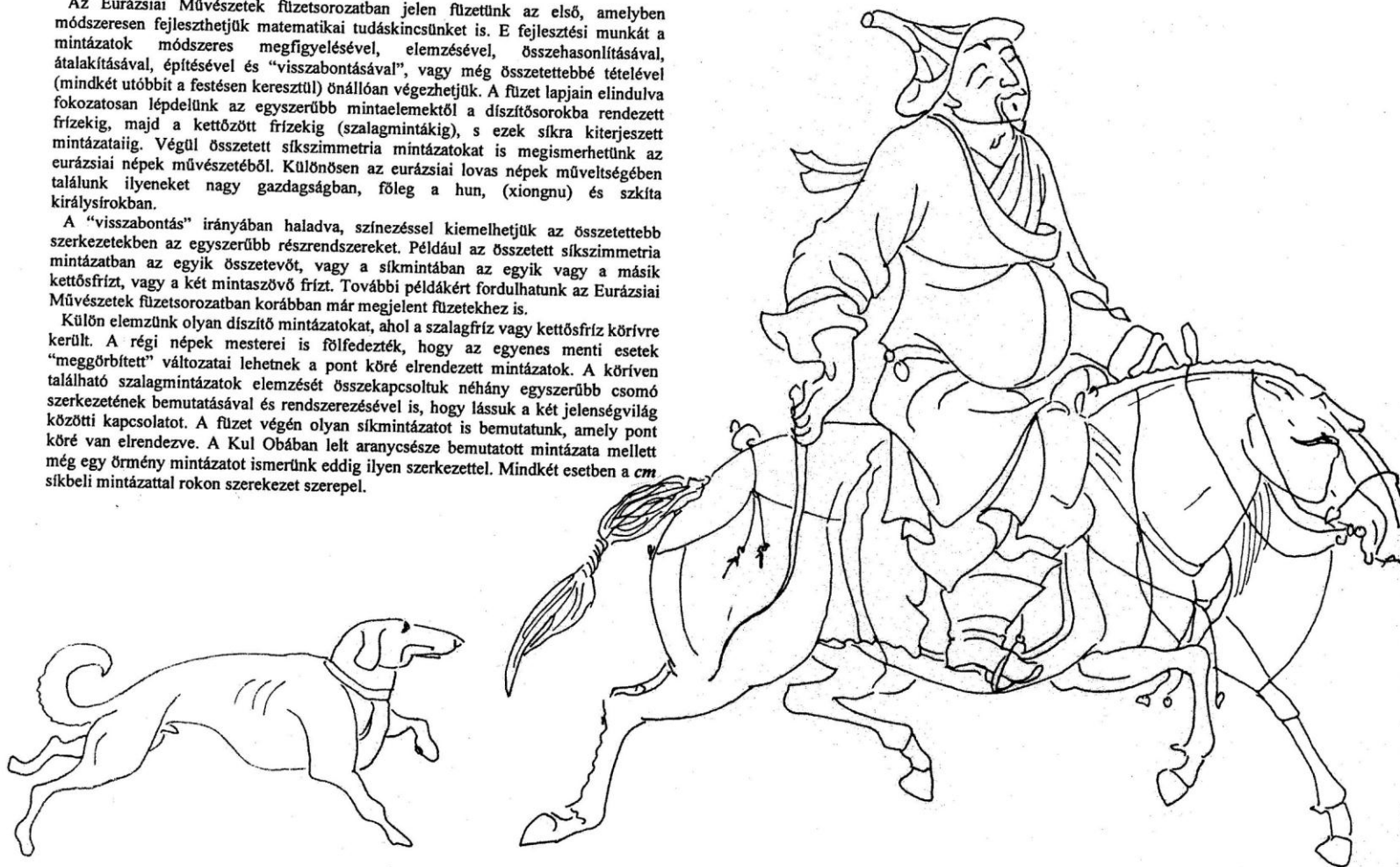
Belőlük hullámvonalú indaképletek indulnak ki, jobbra és balra, tükör-szimmetrikusan, cm szerkezetű alrendszert adva.



Az Eurázsiai Művészetek füzetsorozatban jelen füzetünk az első, amelyben módszeresen fejleszthetjük matematikai tudáskincsünket is. E fejlesztési munkát a mintázatok módszeres megfigyelésével, elemzésével, összehasonlításával, átalakításával, építésével és "visszabontásával", vagy még összetettebbé tételével (mindkét utóbbit a festésen keresztül) önállóan végezhetjük. A füzet lapjain elindulva fokozatosan lépdelünk az egyszerűbb mintaelemektől a díszítősorokba rendezett frizekig, majd a kettőzött frizekig (szalagmintákig), s ezek síkra kiterjesztett mintázataig. Végül összetett síkszimmetria mintázatokat is megismerhetünk az eurázsiai népek művészetéből. Különösen az eurázsiai lovas népek műveltségében találunk ilyeneket nagy gazdagságban, főleg a hun, (xiongnu) és szkíta királysírokban.

A "visszabontás" irányában haladva, színezéssel kiemelhetjük az összetettebb szerkezetekben az egyszerűbb részrendszereket. Például az összetett síkszimmetria mintázatban az egyik összetevőt, vagy a síkmintában az egyik vagy a másik kettősfríz, vagy a két mintaszövő fríz. További példaként fordulhatunk az Eurázsiai Művészetek füzetsorozatban korábban már megjelent füzetekhez is.

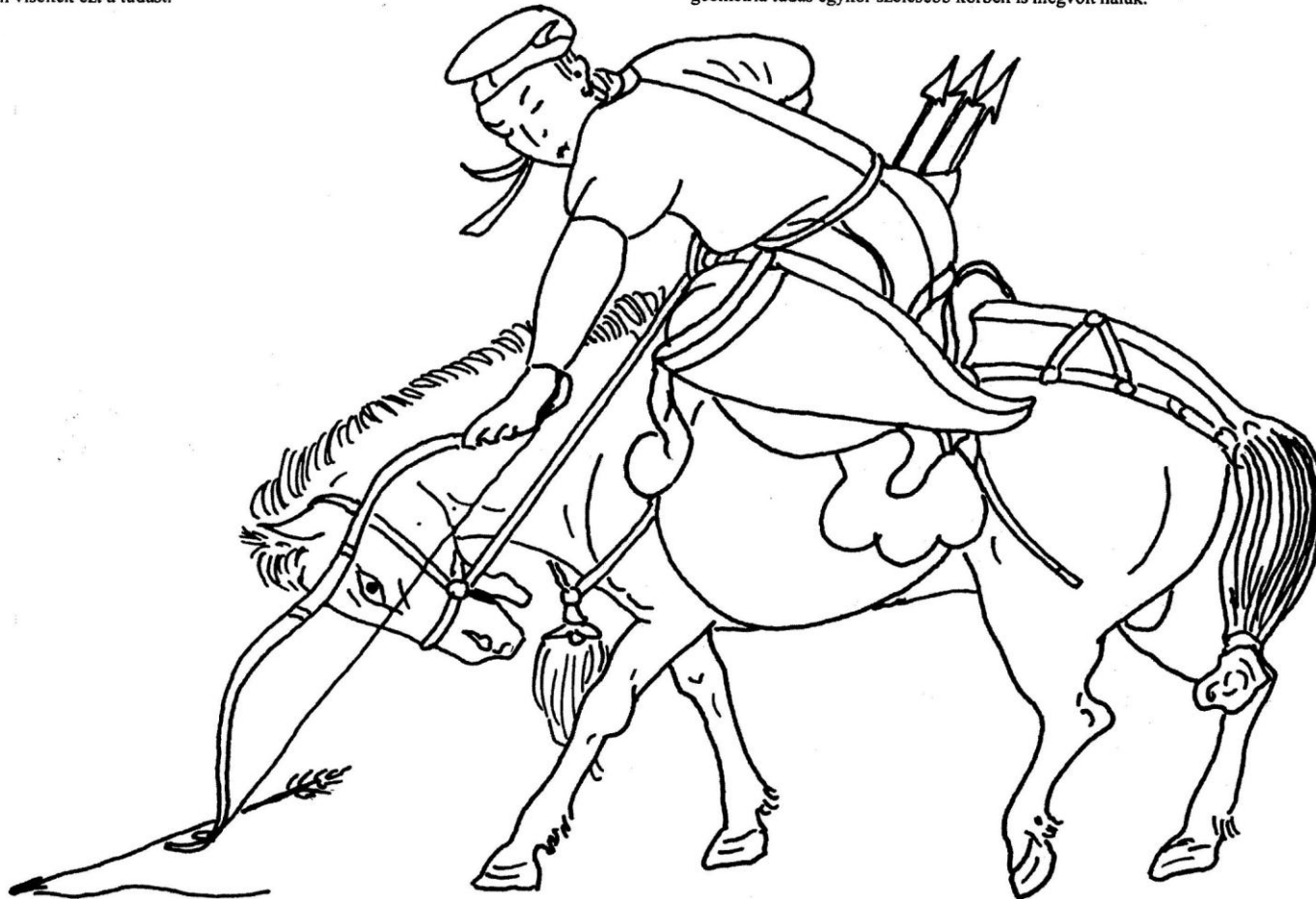
Külön elemzünk olyan díszítő mintázatokat, ahol a szalagfríz vagy kettősfríz körívre került. A régi népek mesterei is fölfedezték, hogy az egyenes menti esetek "meggörbített" változatai lehetnek a pont köré elrendezett mintázatok. A köríven található szalagmintázatok elemzését összekapcsoltuk néhány egyszerűbb csomó szerkezetének bemutatásával és rendszerezésével is, hogy lássuk a két jelenségvilág közötti kapcsolatot. A füzet végén olyan síkmintázatot is bemutatunk, amely pont köré van elrendezve. A Kul Obában lelt aranycsésze bemutatott mintázata mellett még egy őrmény mintázatot ismerünk eddig ilyen szerkezettel. Mindkét esetben a *cm* síkbeli mintázattal rokon szereket szerepel.

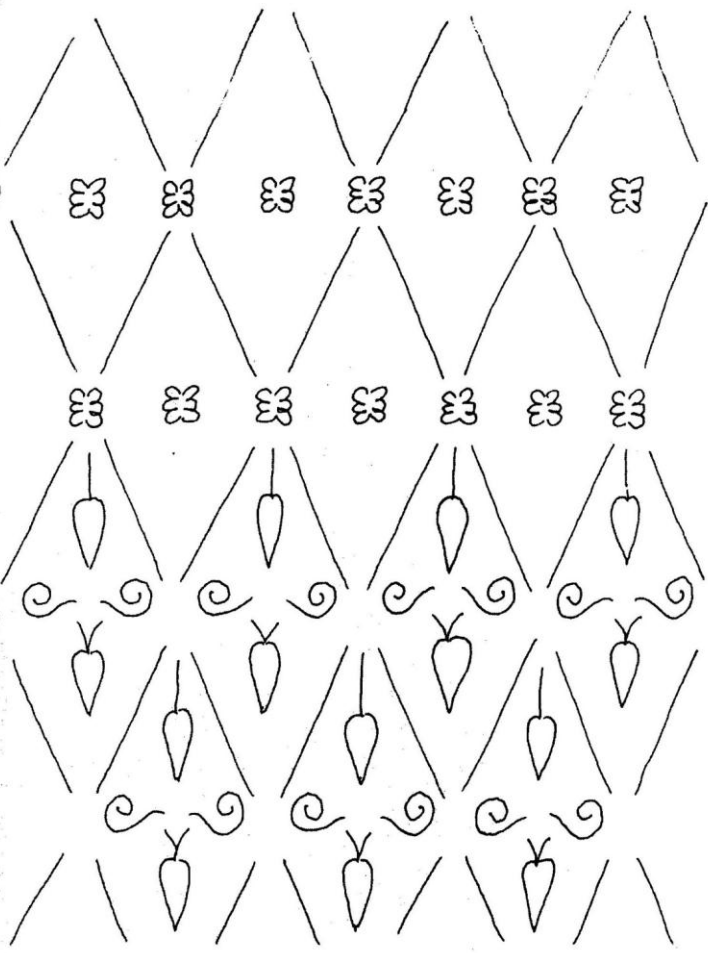
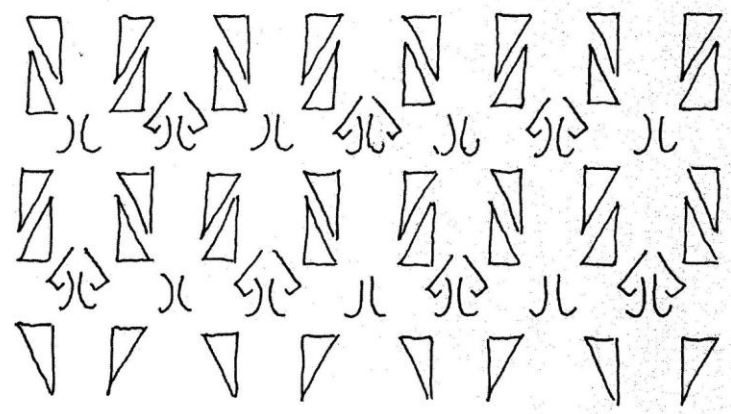
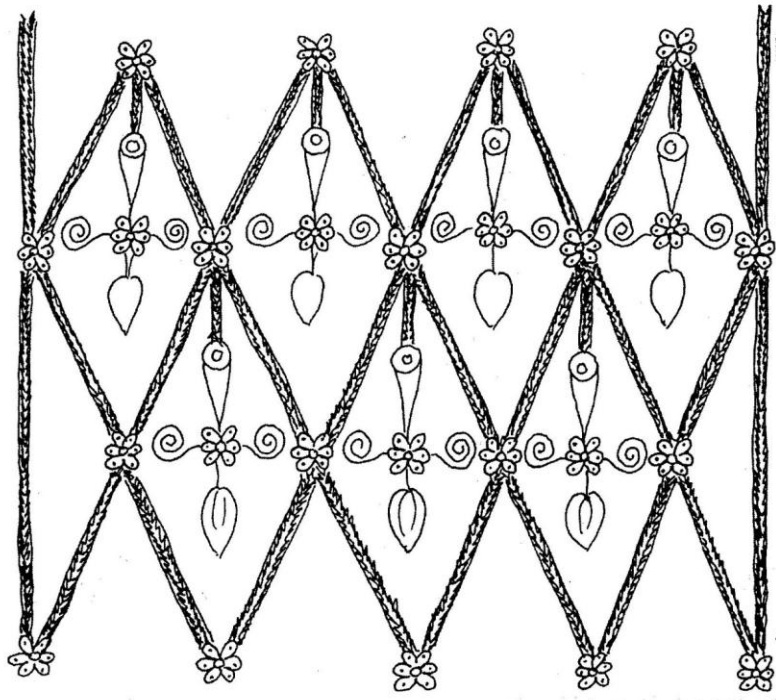


A díszítőművészeti matematika mindvégig kapcsolódik füzetünkben az eurázsiai művészeti ábrázolásokhoz. Ezen a képünkön lovasokat láthatunk vadászaton (balra) és ijászáron (jobbra). Beiktatott életképeinkkel megőrizzük a sorozat változatosságát, kiállítás és kifestő jellegét is.

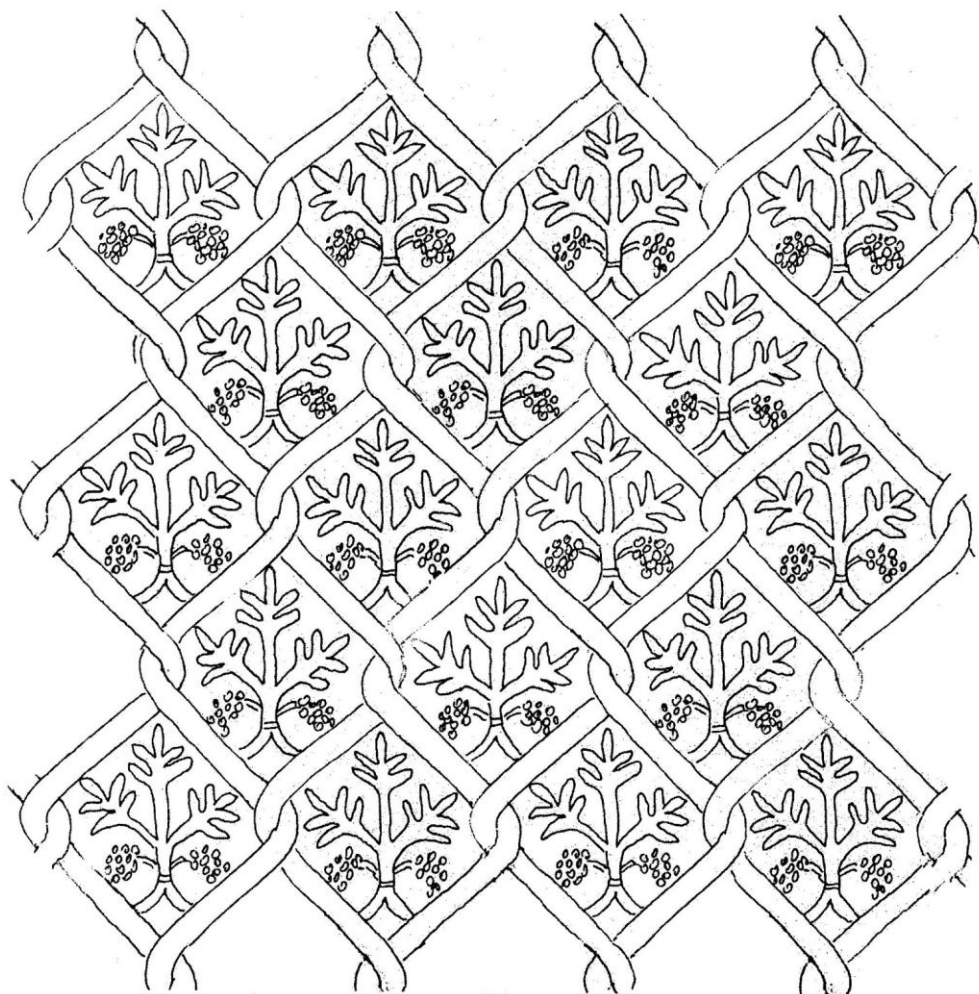
Füzetünkön végighaladva megtapasztalhatjuk és fölismerhetjük, hogy a szerkezetépítésről szerzett geometriai tudásukat e régi népek a mesterek alkotásaiban, a díszítőművészetben őrizték és fejezték ki. Természetesen a tárgyi emlékek egykoron magukon viselték ezt a tudást:

szövésben, láncingek és kapcsolt anyagi szerkezetek formájában, de ezek a hétköznapi életben használt anyagok elporladtak, s csak a fémben, fában, csontban maradt fenn néhány díszítő elem bizonyítékkul arra, hogy ez a szerkezetépítő geometria tudás egykor szélesebb körben is megvolt náluk.





Kul Oba, Krim félsziget, Ukrajna. Szkíta kori fejdísz mozgó elemekkel, *cm*/*pmm*/*cm* szerkezetű mintázattal



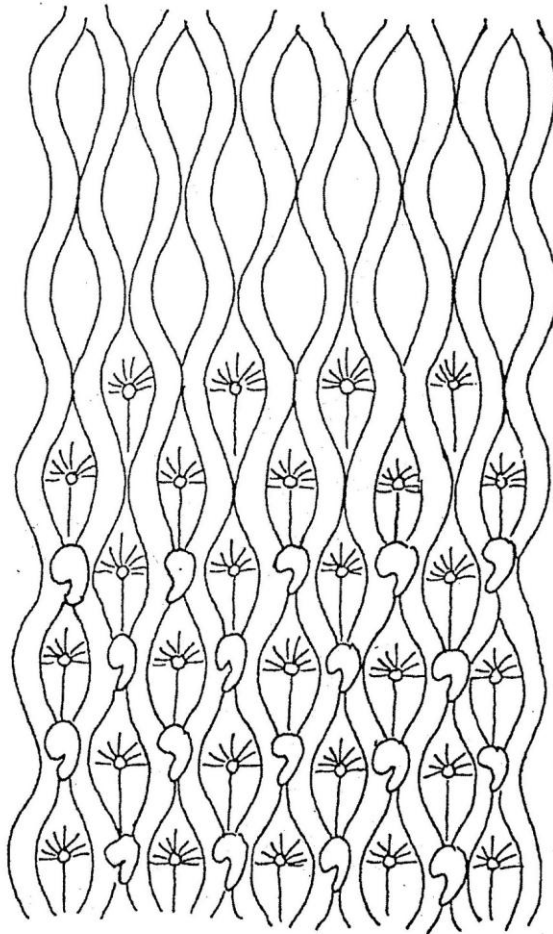
Pécs

Füzetünk utolsó lapjain visszatérünk Nyugat-Euráziába. A bal oldali lapon egy nevezetes krimi szkíta ásatási leletet elemzünk. Kul Oba szkíta királysírjában találták ezt a hálószerkezetű fejdíszet. Az ábra bal alsó részén, a hálódísz rajza alatt, bemutatjuk a mintázat csontvázát háromszög elemekkel. Az ábrától jobbra pedig fokozatosan megépítjük a minta szerkezetét összetevőiből.

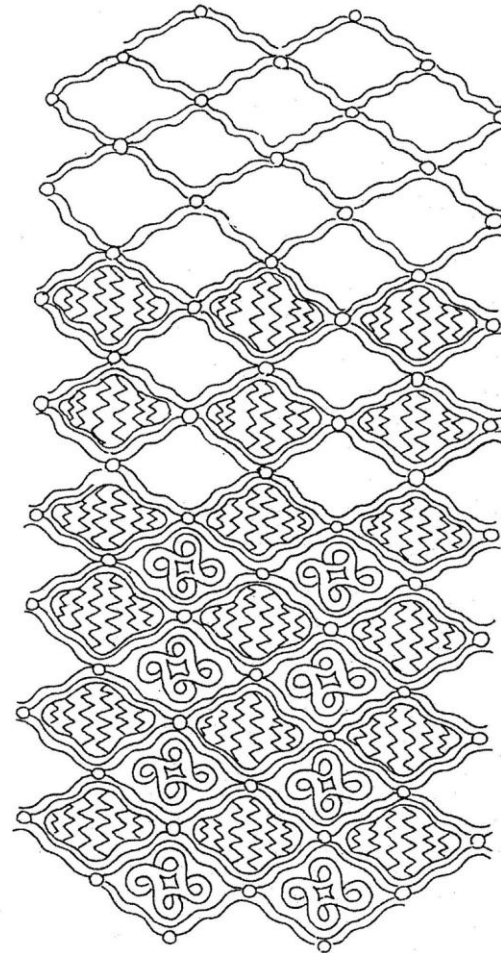
Az első építkezési szintet a rombuszos hálózat képezi, melynek szerkezete *cmm* rendezettségű. Részben a függő, részben a hálózatra erősített kicsi virágocskákból (háromvágásos szárnyú pillangókból) összeáll egy másik mintázat is, amely *pmm* szerkezetű. Végül a leglátványosabb elem következik, a rombuszokba fölülről belógó *cm* mintázatú „bajusz” díszítmények csoportja. Az egész összetett krimi szkíta mintázatnak a szerkezeti rendszere tehát a következő:

cmm/pmm/cm.

A jobb oldali tükör mintázata az egyik legrégebbi magyarországi románkori székesegyház egykori oszlopdíszítése volt. Ma a Pécsi Dóm Múzeumában látható. Itt két különböző szerkezetet fedezhetünk föl egymásra rétegződve. A hálózatot alkotó fonatok hullámosan egymást áthurkoló szerkezete *pgg* rendezettségű. A hálószemekben virágcsokrokat látunk, amelyek a tarsolylemezekről is jól ismert *cm* szerkezetű alrendszeret alkotják. Az egész összetett pécsi románkori oszlopdísz mintázatnak a szerkezeti rendszere tehát a következő: *pgg/cm*. Ez a szerkezeti rendezettség megegyezik a gyulafehérvári székesegyház déli kapujának oszlopán megfigyelhető egyik oszlopfaragásával, melyet a Szent István király emlékezete című Eurázsiai művészetek füzetünkben elemeztünk.



Kréta



Pseira

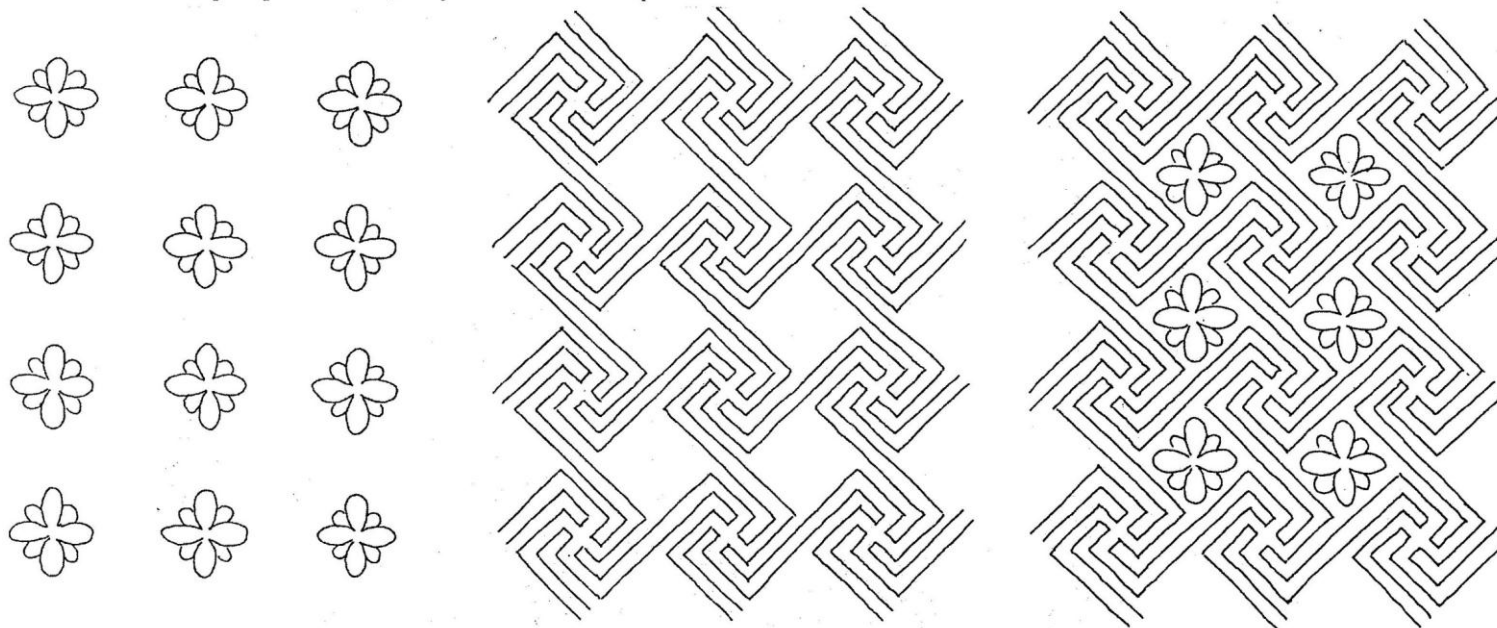
Két összetett szerkezetű ókori krétai mintát mutatunk be búcsúzól. Felülről lefelé haladva fokozatosan épülnek föl az azokat összetevő síkbeli mintázatokból.

A bal oldali mintán egy csésze díszítése a következő építkezési szintekre bontható szét.

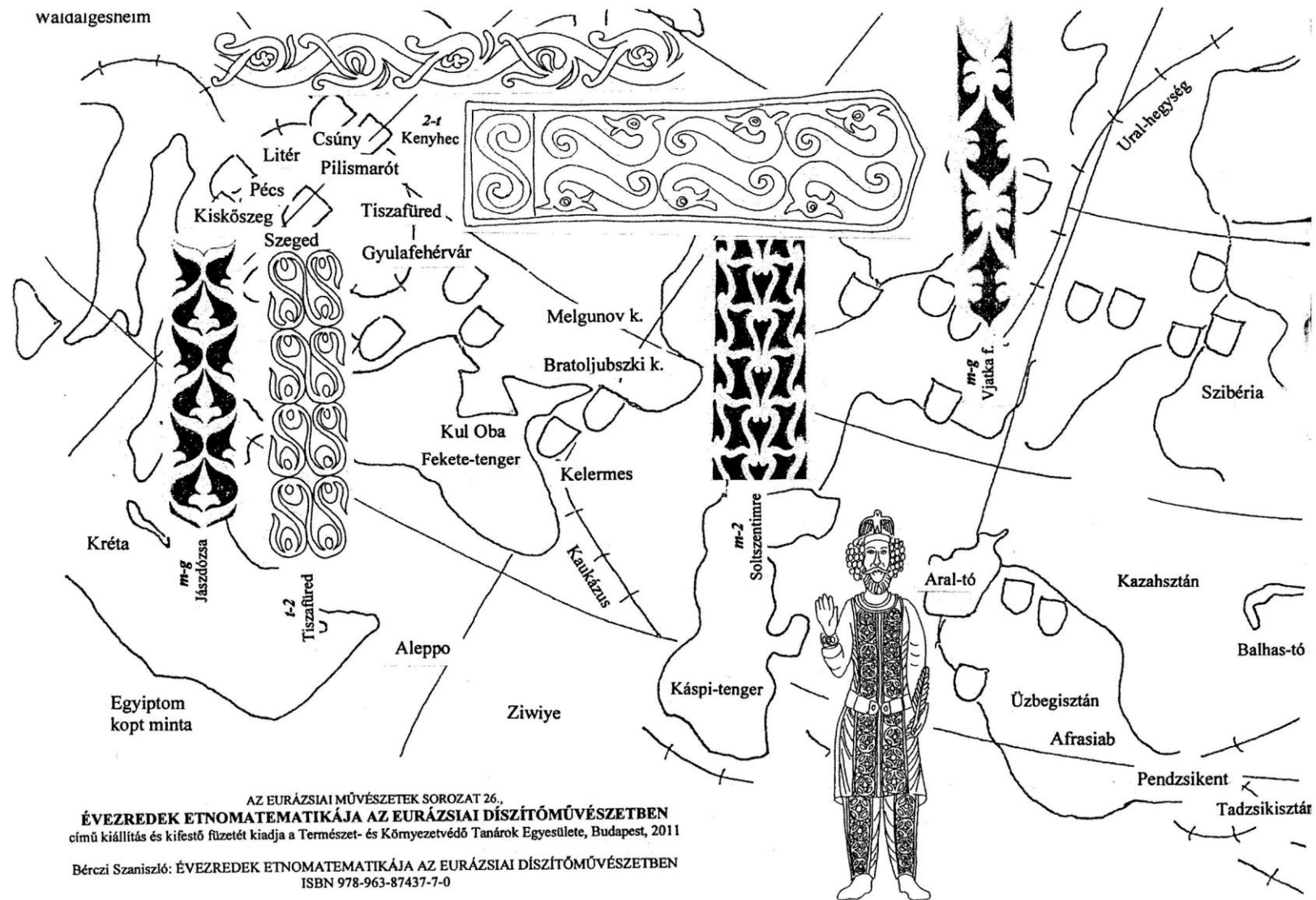
Hullámvonalak alkotják a mintázat rácsozatát, amit kettős szál jelez, és szerkezete *cm*m rendezettségű. A pálmafákra emlékeztető szálas-sugaras mintaelemmel egy *cm* szerkezetű réteg következik. Végül kicsi kagylók alkotják a *p1* mintázatú rácsozatot a hullámok találkozási pontjain elhelyezkedve. Az egész összetett ókori krétai mintázatnak a szerkezeti rendszere tehát a következő: *cm*m//*cm*//*p1*.

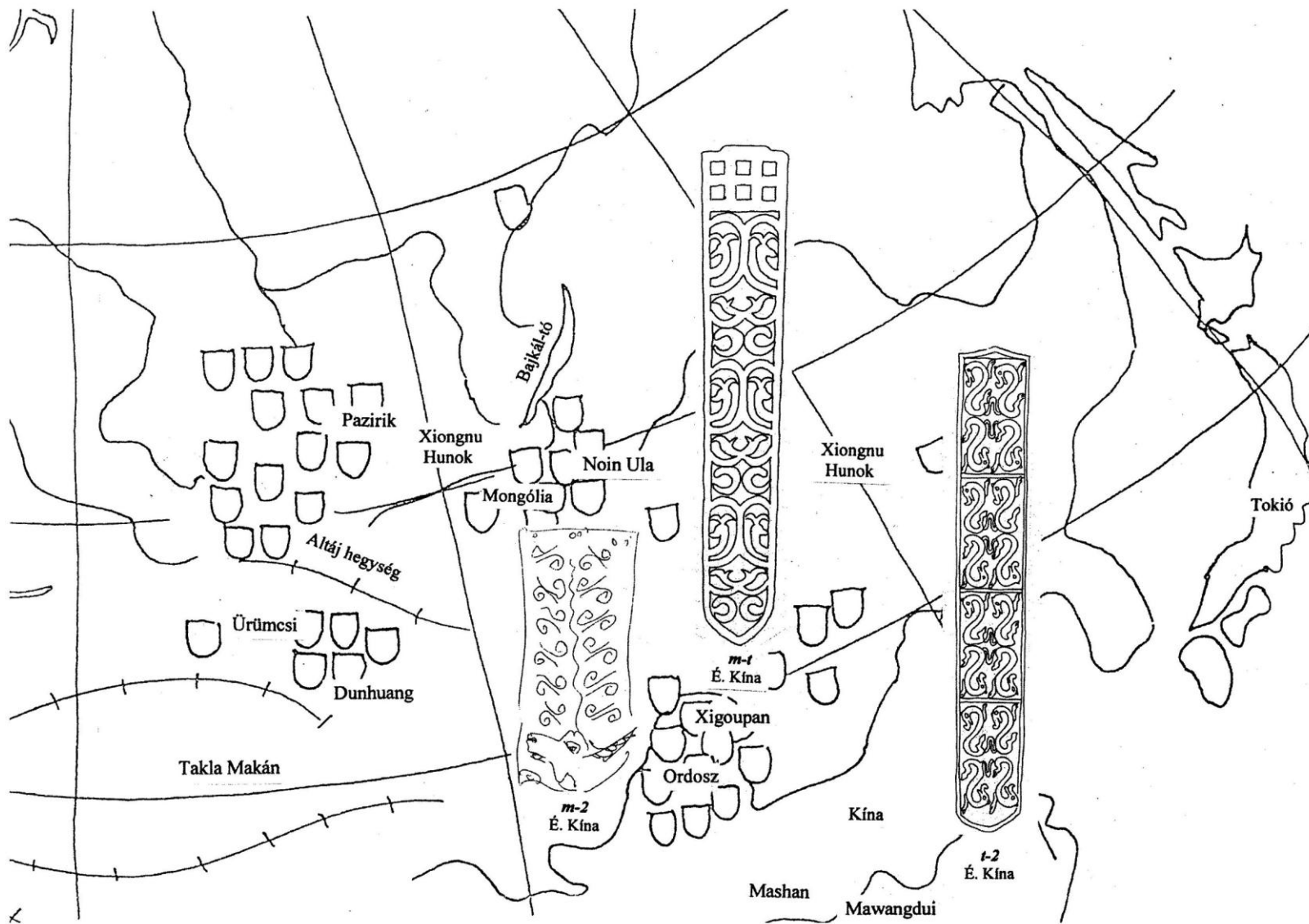
A második mintázati „oszlop” egy királylány szoknyáját díszíti Krétán. Itt is három különböző szerkezetet fedezhetünk föl egymásra rétegződve. A hálózatot alkotó hullámvonalak szerkezete *cm*m rendezettségű. A fűrészfogasan kitöltött rombuszok alrendszere *p*m szerkezetű. Az üresen maradt rombuszokat pedig egy *p1* rendezettségű mintázat tölti ki. Az egész összetett ókori krétai mintázatnak a szerkezeti rendszere tehát a következő: *cm*m//*p*m//*p2*.

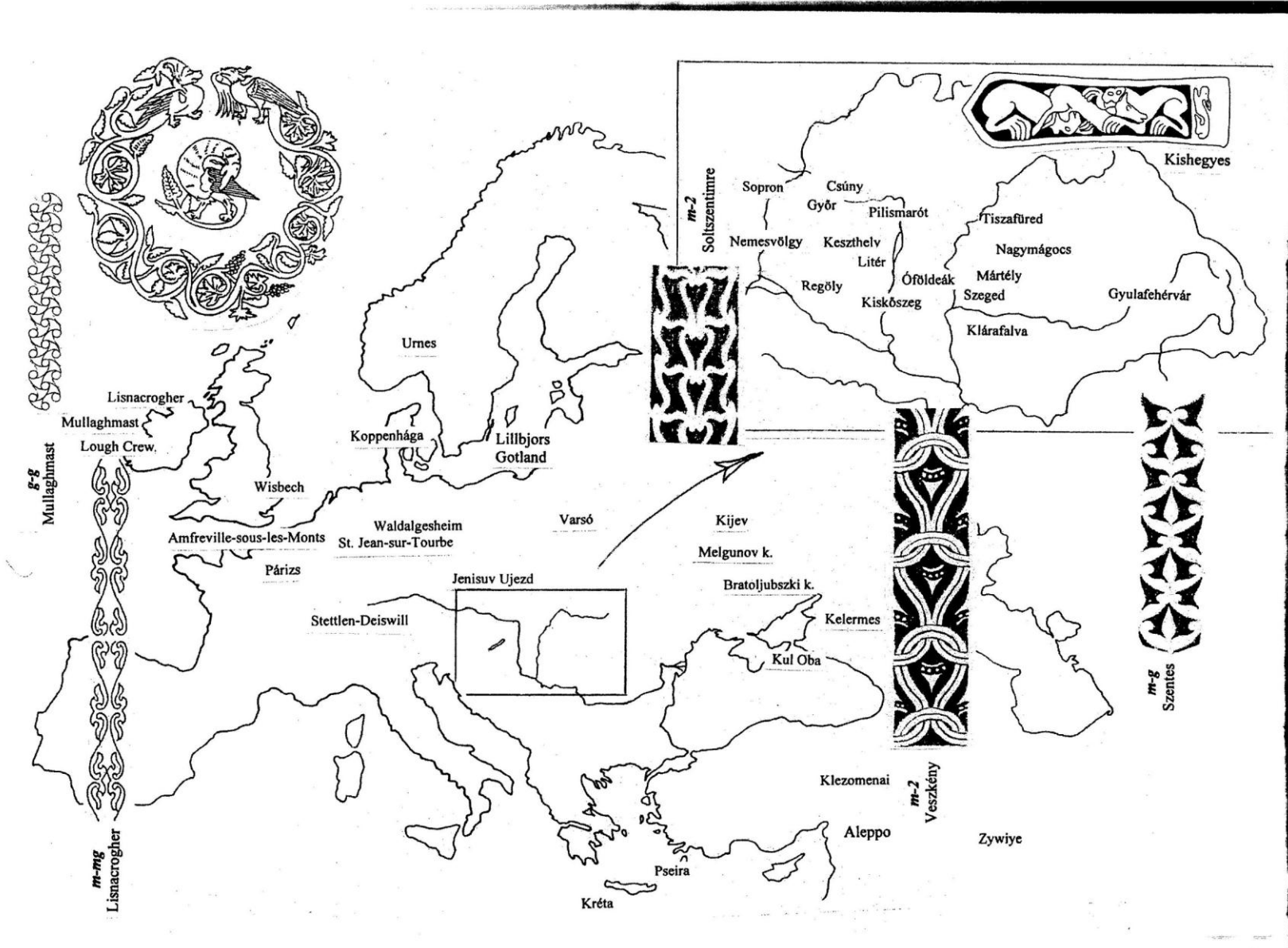
Összetett síkmintázat $p4m/p4$ mintázattal, a Kopt Művészet című budapesti kiállításról.

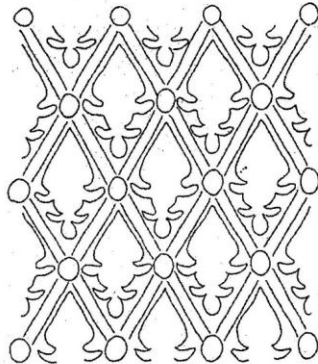
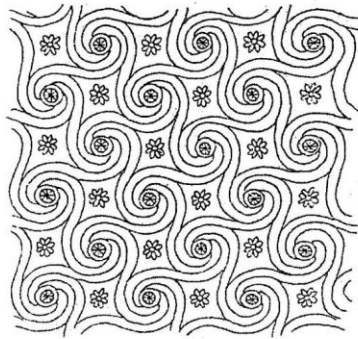
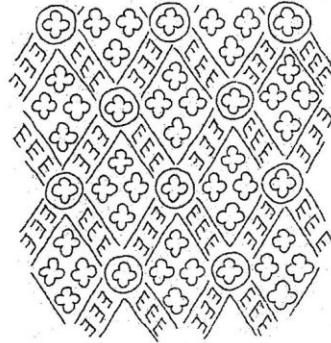


IRODALOM: [1] Bakay K. (1997, 1998, 2005) *Őstörténelmünk régészeti forrásai. I. II. III. (The Sources of the Hungarian History.)* (in Hungarian), Miskolci Bölcsész Egyesület, Miskolc; [2] Bérczi Sz. (1986): Escherian and Non-Escherian Developments of New Frieze Types in Hittite and Old Hungarian Communal Art. in: *M. C. Escher: Art and Science* (szerk. H. S. M. Coxeter et al.) 349-358. old. North-Holland, Amsterdam; [3] Bérczi Sz. (1987a): Szimmetriajegyek a honfoglalás kori palmettás és az avar kori griffes-indás díszítőművészetben. *Cunaria*, 18. (Bács-Kiskun Megyei Múzeumi Évkönyv), 9-60. old. Kecskemét; [4] Bérczi Sz. (1987b): A szimmetria a régészetben. *Tudomány*, 1987/február, 38-41. old. Budapest; [5] Bérczi Sz. (1987c): *Szimmetria és techné a magyar, avar és hanti díszítőművészetben*. Leuveni Katolikus Egyetem, Collegium Hungaricum, (Katalógus a kiállításokhoz), 59 old. Leuven; [6] Bérczi Sz. (szerk.) (1987d): *Magyarország és Műveltség. (Az INTART Társaságban a Magyar Műveltség Rétegződése témakörben szervezett I. szimpózium előadásai, szerkesztés)*. Művelődéskutató Intézet - INTART kiadás, Budapest; [7] Bérczi Sz. (1989): *Symmetry and Technology in Ornamental Art of Old Hungarians and Avar-Onogurians from the Archaeological Finds of the Carpathian Basin, Seventh to Tenth Century A.D.* (in: *Symmetry 2*, Ed. I. Hargittai, *Computers Math. Applic. CCMWA*) 17. No. 4-6. pp. 715-730. Pergamon Press, Oxford; [8] Bérczi Sz. (1990): *Szimmetria és Struktúrápítélet*. Egyetemi jegyzet, JJ-1441. Tankönyvkiadó, Budapest; [9] Bérczi Sz. (2000): *Katachi U Symmetry in the Ornamental Art of the Last Thousands Years of Eurasia. FORMA*, 15/1, 11-28. Tokyo; [10] Bérczi Sz. (2003): On the Earlier Occurrences of the cm-Type Nets and Wallpaper Patterns in Ornamental Arts of Central Eurasia. *Symmetry: Culture and Science*, 12. No. 1-2, p. 5-24. (ISSN 0865 4824), Budapest; [11] Bérczi Sz. (2003): Composite Wallpaper Patterns Among Intuitive Ethnomathematical Discoveries of the Ancient Crete and Urartu. *Symmetry: Culture and Science*, 12. No. 1-2, p. 39-52. (ISSN 0865 4824), Budapest; [12] Bérczi Sz. (2004): The Role of Curie Principle in Understanding Composite Plane Symmetry Patterns: New Ethnomathematic Relations in Ancient Eurasian Ornamental Arts from Archaeological Finds of the Period I. M. B. C. and I. M. A. D. *FORMA*, 19/3, pp. 265-277. Tokyo; [13] Bérczi Sz. (szerk.) (2005): *Adathorizontok Eurázsiaiban I. Művészetek, műveltség-rétegződések*. (TKTE, ZMTE), Piremon; [14] Bérczi Sz. (2007): New Composite Plane Symmetry Patterns from the Ancient Eurasia. *Symmetry: Culture and Science*, 18. No. 1, p. 61-70. (ISSN 0865 4824), Budapest; [15] Bérczi Sz. (2008): *Hun-szklta művészet*. (TKTE), Piremon, Debrecen; [16] Bérczi Sz., Bérczi K., Bérczi Zs., Kabai S. (2003): Coloring Booklet Series about the Arts of Central Eurasia with Rich Heritage of Ethnomathematical Ornamental Arts. *Symmetry: Culture and Science*, 12. No. 1-2, p. 231-239. (ISSN 0865 4824), Budapest; [17] Coxeter, H. S. M. (1986): Coloured Symmetry. in: *M. C. Escher: Art and Science* (szerk. H. S. M. Coxeter et al.) 15-33. old. North-Holland, Amsterdam; [18] Davydova, A., Miniaev, S. (1988): The belt with bronze plates from Derestui cemetery. *Soviet Archaeology*, 1, pp. 230-233; [19] Davydova, A., Miniaev, S. (2003): Archaeological sites near Dureny village. *Archaeological Sites of the Xiongnu*, 5. Asiatic Foundation, Saint-Petersburg; [20] Erdélyi I., Sugár L. (1982): *Ásiai lovas nomádok*. Gondolat, Budapest; [21] Érdy M. (2001): *A hun lovastemetkezések*. Magyarországról, Édes Hazánkért Kiadó, Szekesfehértvár; [22] Érdy M. (2010): *A magyarországi keleti eredete és hun kapcsolata*. Kairosz Könyvkiadó, Budapest; [23] Fetichev N. (1935): A honfoglaló magyarság fémművészete. *Archaeologia Hungarica*, XXI. Budapest; [24] Garam É. (1995): *A tiszafüredi avar kori temető*. Akadémiai Kiadó, Budapest; [25] Grünbaum, B. (2004): Periodic Ornamentation of the Fabric Plane. Lessons from Peruvian Fabrics, page 18-64. In: *Symmetry Comes of Age: The Role of Pattern in Culture*, Washburn, D. K., Crowe, D. W. (Editors), University of Washington Press (ISBN 0295983663); [26] Grünbaum, B., Shepherd, G. C. (1988): *Tilings and Patterns*. Freeman, New York; [27] Hutzka J. (1930): *A turáni magyar ornamentika története*. (in Hungarian) (*The History of the Turanian Hungarian Ornamentical Art*). Budapest; [28] László, Gy. (1943): Der Grabfund von Koronó and der altungarische Sattel. *Archaeologia Hungarica*, XXVII. Budapest; [29] László, Gy. (1955): A kenézli honfoglaláskori ítegez. (in Hungarian with Russian abstract: Kolcsan dja luka iz pogrebnija Kenézli perioda nazjajta rogyint.) *Folia Archaeologica* VII, 111-122. Budapest; [30] László Gy. (1974): *A népvándorláskor művészete Magyarországon*. Corvina, Budapest; [31] Miniaev, S. (1995): New finds of Xiongnu decorative bronzes and a problem of origin of "geometrical style" in Xiongnu art. *Archaeological News*, 4, Sankt-Petersburg; [32] Obrušanszky B. (2008): *Humok a selyemúton*. Masszi Kiadó, Budapest; [33] Okladnykov A. P., Martinov A. I. (1983): *Szibériai sziklarajzok*. Gondolat, Budapest; [34] Prince Mikasa Takahito (1996): Development and Modification of the "Holy Symmetrical Design" West and East of the "Silk Road". (in: *Katachi U Symmetry*, T. Ogawa, K. Miura, T. Masunari, D. Nagy, Eds.) p. 81-94. Springer, Tokyo; [35] Rudenko, Sz. I. (1953): *Kultúra naxszenlja Gornovo Altaja v Szkljszkoje Vremja*. (in Russian) Akademia Nauk, Moskva; [36] Szász B. (1943): A hunok története. Atilla Nagykirály. Bartha Miklós Társaság, Budapest (Szabad Tér K. 1994); [37] Weyl, H. (1982): *Szimmetria*. Gondolat, Budapest







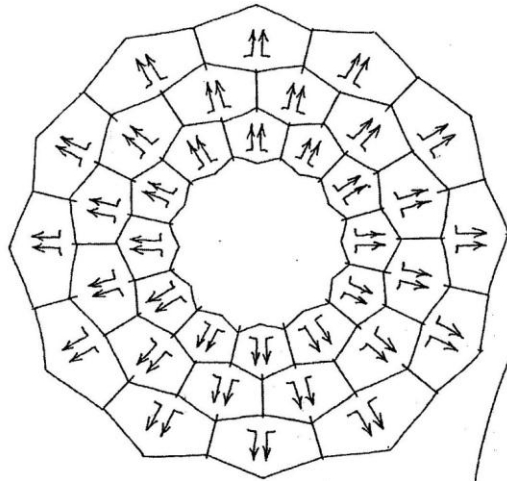


Az Ókori Eurázsiai művészetek füzet sorozat több füzetében szerepeltek már összetett síkszimmetria-mintázatok. Ezek közül néhányat földézőnk itt is. Néhány eddigi képünk is megjelent már, főleg a *Közép-ázsiai művészet* című füzetünkben, ahol afrazsiabi falképrészleteket mutattunk be. Ábránk bal oldali oszlopában az *Ókori krétai és görög művészet* c. füzetünk két krétai mozaikja áll, $p4/p2$ ill. $p4/p4m$ szerkezettel. A jobb oldali oszlopban a *Hun-szkíta művészet* c. füzetünkben vett két mintaszerkezet látható, mindkettő $cm/m/cm$ szerkezettel: a felső Pazirikból (Oroszország), az alsó Ürümcsiből (Kína).

Összegzés

Az eurázsiai népek művészetének gazdagságát sokan és sokrétűen elemezték, bemutatták. (Fettich, 1935, László, 1974, Bakay, 1997, 2005, Obrušánszky, 2008, Érdy, 2010). Összetett, geometrikus díszítő-mintázatok már az újkőkori épületfalakon és a szövési kultúrákban is megtaláljuk (Pl. Kisázsiai művészetek c. füzetünkben is: Chatal Höyükben, vagy a Magyar Alföldön). Mintegy 4000 évvel ezelőtti leletek vannak Krétáról, a görögöket megelőző műveltségből (Knosszosz), Kisásiából (Klazomenai). A Kr. születése előtti 2. évezredben az andronovói műveltség terjedt el fokozatosan a sztyeppén, majd erre rétegződve a lovas-műveltség leletanyaga formált adathorizontokat az összetett síkgeometriai mintázatokból a régészeti leletek körében (Kul Oba a Krim-félszigeten, Pazirik az Altáj-hegységben, Noin Ula a Bajkál-tótól délre fekvő xiongnu (hun) királyságokban). E díszítőművészeti, geometriai tudást is tartalmazó műveltségnek számos eleme sokáig fennmaradt a sztyepei tájakon élő népeknél és időben feljön a népvándorlás koráig. A Népvándorlással mozgó népcsoportok: hunok (xiongnu), avarok, onogurok, magyarok magukkal vitték más tájakra is e mintaszerkezeteket. Így az ornamentális díszítésű alkotások, melyeknek a szerkezetét vizsgáltuk, széles körben elterjedtek (Pr. Mikasa, 1995, Bérczi, 2008). Műveltséget jellemző gazdagságuk egy-egy műveltségkörben mindvégig fennmaradt.

A geometriai szerkezetek fölismerését a technológiákhoz és az intuitív matematikai variációs készséghez kapcsolhatjuk. Egy-egy készlet gazdagsága, például a kelta kori kettős-frízeké, vagy az avar kori kettős-frízeké, jól megfigyelhető a régészeti leleteken. Ugyancsak jól megfigyelhető a mintaépítés szerkezeti rendszere a sztyepei művészetben. A mintaszerkezet kiindulásának egy frízt tekinthetünk. Ennek megkettőzött változata (pl. tükrözéssel) is előfordul, majd az is, amikor a tükrözött egyenessel végzett kettőzést folytatva a síkra kiterjedő mintázatához jutunk. További fejlesztő lépés volt az, hogy a mintázat szétvált egy hálózatra, és a benne helyet foglaló „pontoszerű” minta rácsára. E kétféle mintázat másféle szerkezetét azután újabbak hozzáadásával lehetett bővíteni. A szerkesztés újabb fokozata a színezés, amellyel most már részcsoport szerkezetet is meg lehetett jeleníteni. Mindezek a láncszemek megtalálhatók az elmúlt 3000 év sztyepei-művészetében. A kezdeti fölismerések ellenére az eurázsiai leletanyag nagyrészt még földolgozásra vár a geometriai szerkezetek szempontjából. Mindez ideig a díszítőminta szerkezetét nem sorolták föl a régészeti leleteket leíró adatok között. Reméljük, hogy eljön az idő, amikor a díszítőminta szerkezeti adatát ugyanolyan értékes információnak tartják majd a régészek, mint azt, hogy milyen anyagú a talált eszköz: csont, bőr, fa, réz, bronz, acél, üveg, kerámia.



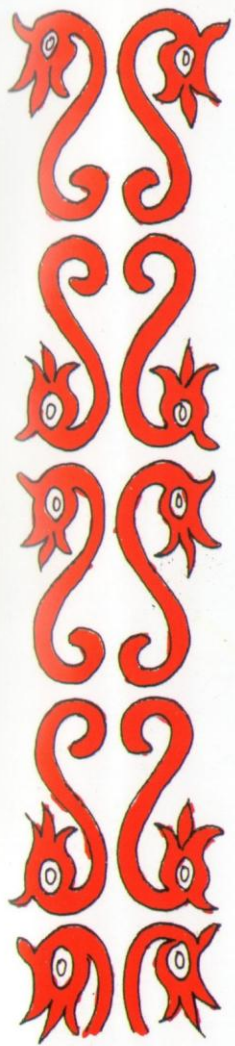
A kul obai tál mintázatának "csontváza,
ha a méretváltozástól eltekintünk.

Az EURÁZSIAI MŰVÉSZETI SOROZAT 2011 augusztusáig

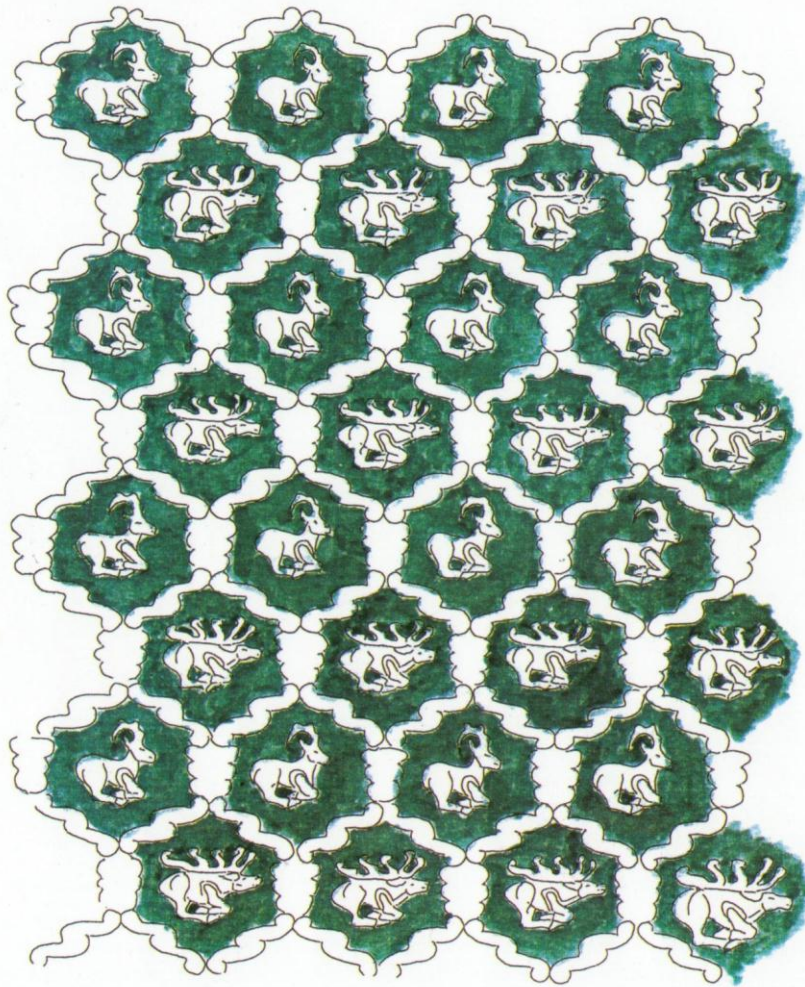
1. HONFOGLALÁS KORI KIFESTŐ - 1996
2. ROMÁNKORI TEMPLOMKAPUK - 1998
3. SZENT LÁSZLÓ KIFESTŐ - 1999
4. SZENT ISTVÁN KIRÁLY EMLÉKEZETE - 2000
5. KELTA KIFESTŐ - 2000
6. VIKING KIFESTŐ - 2000
7. SZKÍTA KIFESTŐ - 2001
8. KAZETTÁS MENNYEZETEK - 2002
9. JAPÁN, A FELKELŐ NAP ORSZÁGA - 2002
10. 1000 ÉVES MAGYARORSZÁG - 2002
11. IRÁNI KIFESTŐ - 2003
12. KAUKÁZUSI MŰVÉSZET - 2003
13. KÖZÉP ÁZSIAI MŰVÉSZET - 2003
14. A HUNOK MŰVÉSZETE - 2003
15. ÓKORI KRÉTAI ÉS GÖRÖG MŰVÉSZET - 2004
16. AZ ÖRMÉNYEK BIBLIA-MŰVÉSZETE - 2004
17. ETRUSZK, RÓMAI ÉS TOSZKÁNAI MŰVÉSZET - 2004
18. ÓSI KÍNAI MŰVÉSZETEK - 2004
19. SZIBÉRIA MŰVÉSZET - 2005
20. MEZOPOTÁMIAI MŰVÉSZET - 2006
21. MAGYAR SZENT KIRÁLYLÁNYOK EMLÉKE - 2007
22. HUN-SZKÍTA MŰVÉSZET - 2008
23. KELET-ÁZSIAI MŰVÉSZET - 2009
24. KISÁZSIAI MŰVÉSZETEK - 2010
25. KÖRTEMPLOMOK A KÁRPÁT-MEDENCÉBEN - 2011
26. ÉVEZREDEK ETNOMATEMATIKÁJA - 2011



Aranycsésze a Kul Obában föltárt
szkíta királyi halomsírból 12 csepp
alakban elrendezett kettősfríz-mintával.



Szeged
Móra F. Múzeum



Ziwiye



Urartu



Ezt a munkámat az ókori eurázsiai mesterek emlékének ajánlom, akik tudásukkal létrehozták az eurázsiai népek e korai geometriai tudáskincsét a szerkezetépítésről.

Hálával és szeretettel gondolok mindazokra, akik valamilyen formában segítettek az Eurázsiai Művészetek kiállítás- és kifestőkönyv-sorozat napvilágra hozását: Bánsági Tamás, Bánsági Mária, Bérczi Alajos, Bérczi István, Bérczi Katalin, Bérczi Zsófia, Cech Vilmos, Czakó Gábor, Deákné Demjén Ilona, Deák Gyula, Dobos László, Fabriczy Anikó, Földi Tivadar, Fröhlich András, Gucsik Arnold, Gulyás Balázs, Gulyás Pálné, Hudoba György, Jeppesen Henrik, Kabai Sándor, Kiss Ádám, Kiss Ulrich, Kojima Hideyasu, Kovács Zsolt Imre, Kubovics Imre, Kyotaka Ninagawa, Magyar Györgyi, Magyar Jolán, Matyasovich Henrik, Muzsly István, Nagy Dénes, Ogawa Tohru, Pap Gábor, Péter Júlia, Péter Borbála, Schiller István, Szabó László, Szili István, Szőkefalvi-Nagy Erzsébet, Takahito Mikasa hg., Takaki Ryuji, Tóth Albert, Veszolovszky Endréné